

avons appelé les p^2 — ions, formés de p^2 unités e_{ij} satisfaisant aux relations

$$e_{ij}e_{jl}=e_{il}.$$

Si un tel système Σ' peut être regardé comme résultant du prolongement d'un système réel, les unités e_{ij} de Σ' seront p^2 combinaisons linéaires à coefficients réels ou imaginaires des unités $e_1, e_2, \ldots, e_{p^2}$ du système réel Σ.

Si une de ces unités ne fait pas partie de Σ, nous dirons qu'elle est une *unité imaginaire*, et alors il y aura dans Σ' l'unité imaginaire conjuguée. Autrement dit, si l'on a

$$e_{ij}=(x_1+ix'_1)e_1+(x_2+ix'_2)e_2+\ldots,$$

le nombre

$$(x_1-ix'_1)e_1+(x_2-ix'_2)e_2+\ldots$$

fera partie de Σ' et sera dit *imaginaire conjugué* de e_{ij}. Il est clair que, si l'on change les unités de Σ, deux nombres imaginaires conjugués de Σ' ne cessent pas d'être imaginaires conjugués.

78. Cela étant, supposons que l'équation caractéristique de Σ, qui admet en général p racines distinctes, puisse, pour des valeurs réelles de $x_1, x_2, \ldots, x_{p^2}$, admettre un certain nombre de racines réelles et soit $p-2q$ le nombre maximum de ces racines réelles.

Il y a trois cas à distinguer, suivant que q est nul, que q est positif et inférieur à $\frac{p}{2}$ et, enfin, que q est égal à $\frac{p}{2}$.

Supposons d'abord que q soit nul. Alors pour un certain nombre u de Σ l'équation caractéristique a ses p racines réelles et distinctes. Ce nombre, considéré comme appartenant à Σ', peut toujours être supposé de la forme

$$u=\lambda_1 e_{11}+\lambda_2 e_{22}+\ldots+\lambda_p e_{pp}.$$

Or les racines de l'équation caractéristique de Σ sont, pour un nombre donné, les mêmes que celles de Σ'. Mais pour le nombre u de Σ', ces racines sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Il en résulte d'abord que ces p quantités sont réelles. De plus, l'ensemble des nombres x de Σ, pour lesquels on a

$$ux=\lambda_1 x,$$

est compris dans l'ensemble des nombres de Σ' qui satisfont à cette même


T725

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

COMITÉ DE RÉDACTION.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ,

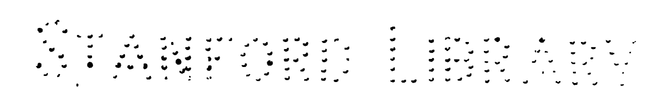
SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DE LA MUNICIPALITÉ DE TOULOUSE,

AVEC LE CONCOURS

DU CONSEIL GÉNÉRAL DE LA HAUTE-GARONNE.

TOME XII. – ANNÉE 1898.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1898

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

EXPOSÉ ET DISCUSSION

DES PRINCIPALES EXPÉRIENCES

FAITES

SUR LES PHÉNOMÈNES DE TORSION,

PAR M. H. BOUASSE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Le nombre des expériences faites sur les phénomènes de torsion est considérable. Malheureusement, beaucoup d'entre elles prêtent à la critique; la technique expérimentale est encore rudimentaire, bien que la définition et la continuité des forces agissantes aient une importance particulière. La question est pourtant suffisamment avancée pour qu'il soit opportun de ne plus se contenter d'approximations grossières et d'employer toutes les ressources de l'art expérimental moderne.

De plus, il s'est introduit une nomenclature et des expressions imagées (hystérésis, accommodation, effets élastiques tardifs, effets d'ébranlement, fatigue d'élasticité) dont le moindre défaut est de ne rien signifier du tout et le pire de servir trop souvent d'explication.

Nous nous proposons de faire, non un historique complet de la question, mais le bilan de nos connaissances actuelles et de leurs lacunes; aussi ne parlerons-nous que des principaux parmi les Mémoires les plus modernes. Laissant de côté Coulomb et Wertheim, malgré la valeur de leurs travaux,

nous citerons les séries de Mémoires de Wiedemann (*Pogg. Ann.*, t. CVI; *Wied. Ann.*, t. VI); Tomlinson (*Phil. Trans.*, 1886-1887); Kohlrausch (*Pogg. Ann.*, t. CXIX, CXXVIII, CLVIII); Cantone (*Nuovo Cimento*, t. XXXV, t. I, II, IV).

Nous renverrons parfois à un Mémoire personnel, publié en août 1897 dans les *Annales de Physique* (paru comme Thèse en janvier 1897).

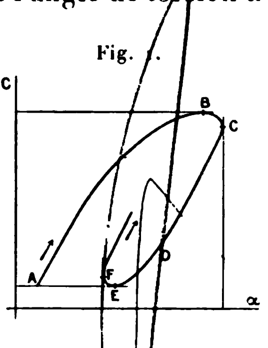
Nous ne nous occuperons pas des théories proposées, non qu'il n'en existe de très remarquables; mais jusqu'à présent elles sont restées loin derrière l'expérience. Les propriétés des corps dépendent à chaque instant de toutes les modifications antérieures, d'où des difficultés mathématiques presque insurmontables dont on ne s'est tiré que par des hypothèses trop simplificatrices. Nous n'avons pas l'idée de diminuer la valeur de ces essais qui acheminent au but, mais ne peuvent servir de guide à l'expérimentateur. D'ailleurs, il importe d'être fixé sur la cinématique d'un phénomène avant d'en discuter la dynamique ([1]).

Enfin nous bornerons notre étude aux phénomènes de torsion; comme on le sait, ceux de flexion satisfont aux mêmes lois.

PARCOURS A VITESSE NULLE.

Pour simplifier notre exposé, admettons d'abord que les parcours se font à température constante, à tension constante, à magnétisme constant, etc., et que la variable unique est l'angle de torsion α compté à partir d'une ori-

Fig. 1.



gine arbitraire. Il faut déterminer le mode de variation $C = \varphi(\alpha)$ du couple C, lorsque α varie suivant une loi quelconque en fonction du temps, $\alpha = f(t)$. Nous représentons les phénomènes sur un plan, en prenant α et

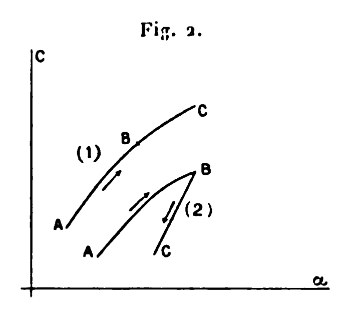
([1]) Ceci était écrit avant la publication des récents et remarquables travaux de M. Brillouin.

C pour coordonnées, et appelons *coefficient de torsion* en un point le quotient $\gamma = \frac{dC}{d\alpha}$.

Ce quotient peut prendre en tout point du plan des valeurs quelconques entre $-\infty$ et $+\infty$. Pour le parcours ABCD (*fig.* 1) par exemple, γ est nul en B, atteint $-\infty$ en C, passe brusquement à $+\infty$ et décroît ensuite jusqu'à o (point E) et $-\infty$ (point F), ... Sa valeur est donc *a priori* indéterminée en tout point du plan : elle dépend des parcours antérieurs.

Limitons le problème, en supposant les parcours effectués à vitesse nulle : ce qui est évidemment un cas limite analogue à celui des cycles réversibles en Thermodynamique. On doit alors distinguer deux sortes de passages en tout point B du plan (*fig.* 2). Ou bien le parcours traverse le point B

Fig. 2.



(courbe 1); γ est *a priori* complètement indéterminé et dépend des parcours antérieurs. Ou bien on s'arrête au point B (courbe 2), et l'on repart de ce point en retournant vers les azimuts d'où l'on arrive; alors le point anguleux B est dit *origine de la courbe de torsion* BC. La tangente d'arrivée en B suivant AB dépend des parcours antérieurs; la tangente de retour suivant BC, tangente à l'origine d'une courbe, a une direction invariable, caractéristique du métal employé : γ prend la valeur typique Γ. Pour le parcours à vitesse nulle, le long des courbes de torsion, γ reste toujours positif et varie de sa valeur maxima Γ à l'origine, à une valeur minima comprise entre Γ et o.

On peut faire à ces propositions l'objection suivante : puisque, pour faire apparaître Γ, les parcours doivent s'effectuer à vitesse nulle et que, d'autre part, cette manière d'opérer est purement théorique, peut-on, par quelque artifice, trouver expérimentalement la valeur de Γ, les vitesses de torsion restant quelconques?

L'expérience montre qu'en tout point du plan, quelles que soient les vitesses employées, si l'on décrit de petits cycles entre azimuts constants et distants de $\Delta\alpha$, le quotient moyen $\Delta C / \Delta\alpha$ sur une courbe ascendante

($|\Delta C| > 0$) ou descendante ($|\Delta C| < 0$) se rapproche d'autant plus de la valeur typique Γ que le parcours est plus petit, qu'il est répété un plus grand nombre de fois, que les couples auxquels il correspond sont plus petits en valeur absolue. Si ces conditions sont mal réalisées, $\Delta C / \Delta\alpha$ diffère de Γ généralement par excès sur les courbes descendantes, par défaut sur les courbes ascendantes. L'expérience montre de plus que, si, arrivé en un point avec une vitesse quelconque, on arrête un temps suffisant, la tangente, à l'origine de la courbe de retour effectuée avec une vitesse quelconque, a l'inclinaison caractéristique.

En un point quelconque d'une courbe de torsion, γ diffère de Γ; il est expérimentalement vain de chercher dans la valeur de γ à faire la part des actions élastiques de la molécule et des forces de liaison des molécules entre elles, ou, d'une manière générale, de donner aux couples de torsion deux origines différentes. Théoriquement, la distinction est légitime et a été faite par Coulomb, le premier, en vertu de cette remarque : que l'on peut faire varier considérablement la forme des courbes de torsion par certaines actions telles que le recuit, sans toucher à la valeur de la constante Γ caractéristique du métal.

PARCOURS A VITESSE NULLE ET TYPIQUES.

Les courbes de torsion à vitesse nulle ont donc en leurs origines une tangente de direction invariable : il s'agit d'en déterminer la forme entière. Nous allons d'abord le faire dans le cas particulier où elles limitent des cycles fermés.

Un cycle se compose des deux parcours effectués en sens contraires; il est défini par la condition que les origines des deux parcours correspondent à deux couples donnés C_1 et C_2, ou à deux azimuts donnés α_1 et α_2. Mais, si l'on part du couple C_1 par exemple, qu'on aille au couple C_2 et qu'on revienne au couple C_1, ce n'est généralement pas au point de départ que l'on aboutit; le cycle n'est pas fermé.

Cependant, si l'on répète l'opération un certain nombre de fois, il tend à se fermer. Les courbes qui le limitent tendent vers des positions et des formes asymptotiques : on peut dire qu'elles se *fixent* dans le plan. Nous étudierons plus loin la manière suivant laquelle se fait cette immobilisation des parcours. Le cycle une fois fermé, il est clair qu'il se trouve à la fois parcouru entre couples et entre azimuts invariables; ses extrémités sont fixes, il est lui-même *fixé* dans le plan.

Il s'agit maintenant de résumer les principales expériences connues en quelques formules qui en soient l'équivalent logique. *La vérité de ces propositions n'est pas ici en discussion :* dans l'immense quantité de matériaux de très inégale valeur que les physiciens ont à leur disposition, il n'y a pas d'autre moyen de faire le départ de ce qui est acceptable et de ce qui ne l'est pas, que de prouver entre ces résultats des contradictions logiques, et ceci n'est possible qu'à la condition de les grouper sous des formules générales. La découverte de ces formules est d'une importance capitale, parce qu'elles précisent les discussions à venir et suggèrent les expériences.

Parmi ces propositions, l'une des plus importantes est celle de l'identité des courbes limites des parcours énoncée par M. Brillouin dès 1896 et dont on va développer les conséquences.

Soit (*fig.* 3) un cycle fermé ABCD. Voici les propositions que l'expérience suggère :

1° Quels que soient les couples C_1 et C_2 qui correspondent aux extré-

Fig. 3.

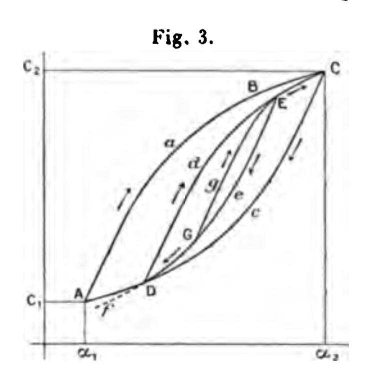
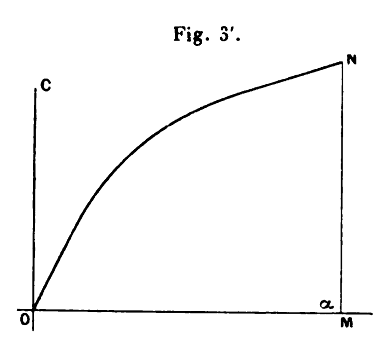


Fig. 3′.



mités, les courbes ABC et CDA sont superposables à partir de leurs origines; c'est-à-dire que, pour tracer ces courbes, on peut employer une même équerre courbe matérielle OMN (*fig.* 3′). Pour tracer ABC par exemple, on amène le point O sur l'origine A, on place horizontalement le côté OM. Pour tracer CDA, on tourne l'équerre de 180°, on amène le point O en C, et l'on place horizontalement le côté OM. Si donc on transporte les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes et qu'on amène leur intersection à coïncider avec l'origine des courbes de torsion, les courbes ABC et CDA satisfont à l'équation unique $C = \Phi(\alpha)$. Bien entendu, quand on passe du point A (origine de ABC) au point C (origine de CDA), le système des axes doit tourner de 180°. Nous dirons que les courbes qui limitent un cycle fermé sont *typiques* ou *caractéristiques*, et nous surmonterons d'un point la lettre qui indique leur origine.

2° Décrivons le parcours $\dot{A}BC - \dot{C}D$, arrêtons-nous en D, puis revenons sur nos pas; la courbe de retour $\dot{D}\,dC$ est typique et repasse naturellement par le point C. Donc, si un parcours I est typique entre deux couples C_1 et C_2, tout parcours II ayant son origine sur le parcours I est typique jusqu'à son croisement avec le parcours I.

3° Sur le nouveau parcours II, arrêtons-nous au point E et rebroussons chemin; d'après la règle précédente, nous revenons en D, suivant $\dot{E}eD$. A partir du croisement D, la courbe $\dot{E}eD$ ne reste pas typique suivant Df. Il y a un point anguleux, et l'on continue suivant DA, c'est-à-dire suivant la dernière courbe typique qui a traversé le point D sans s'y arrêter.

4° Cette règle ne suffit pas à déterminer tous les parcours. En effet, supposons que, le cycle primitif une fois fermé, on décrive

$$\dot{A}BC - \dot{C}D - \dot{D}dE - \dot{E}eD - \dot{D}dE;$$

nous voici au point E qui n'a jamais été traversé par une courbe typique. Nous admettrons que l'on continue suivant EC, c'est-à-dire suivant la voie qu'on aurait suivie la première fois si l'on ne s'était pas arrêté en E.

5° Mais voici un cas plus compliqué : décrivons

$$\dot{A}BC - \dot{C}D - DdE - \dot{E}eG - \dot{G}gE.$$

La règle précédente ne nous dit plus où nous irons; car non seulement EC n'a pas été parcourue effectivement, mais encore nous ne nous présentons plus en E suivant une courbe ayant son origine sur les courbes qui limitent le cycle fermé. On est conduit à généraliser la règle 3° et à admettre qu'il existe en E un point anguleux sur la courbe $\dot{G}gE$, et qu'elle se continue par la courbe EC, c'est-à-dire par la courbe typique la plus inclinée parmi celles qui se sont arrêtées au point E. C'est celle dont l'origine est (en couples) la plus éloignée possible du point E et, par conséquent, se trouve sur $\dot{C}DA$.

6° Quelle que soit la position dans le plan de la bande $C_1 C_2$, la courbe typique $C = \Phi(\alpha)$ reste la même. Donc, si l'on ferme un cycle entre un couple positif et un couple négatif les plus grands qu'il soit possible en valeur absolue, les parcours se trouvent tous définis dans la région accessible du plan. Ils se composent de portions complètement déterminées de la courbe $C = \Phi(\alpha)$ ou, si l'on veut, peuvent se tracer au moyen d'une équerre unique courbe OMN (*fig.* 3').

Ces hypothèses ont des conséquences importantes. Soit $\dot{A}BC - \dot{C}DA$ le

cycle fermé. On ne peut pas sortir de l'aire ABCD; car chaque fois que, suivant une courbe $\dot{E}e$D, on essaye de franchir une des courbes limites, on est forcé de continuer sur elle.

A l'intérieur de cette aire tous les parcours sont complètement déterminés.

Par tout point E de cette aire, on peut faire passer une infinité de courbes typiques; on peut aussi traverser ce point d'une infinité de manières sur ces courbes y présentant un point anguleux.

La valeur maxima des γ en ce point, sur ces courbes, est Γ; la valeur minima correspond aux deux courbes typiques passant en E dont les origines sont sur les courbes limites du cycle fermé.

Un cycle étant fermé entre deux couples C_1 et C_2 : soient deux couples C_3 et C_4, compris entre C_1 et C_2; on peut, entre ces couples et à l'intérieur de l'aire ABCD, fermer une infinité de cycles identiques entre eux et qui ne diffèrent que par leur position dans la bande $C_3 C_4$. Chaque cycle peut être obtenu de deux manières.

Quelle confiance peut-on avoir dans ces règles?

D'abord ce sont des lois limites. Ce n'est pas une de leurs moindres singularités que cette indépendance de la forme des courbes et de la position de leur origine : en particulier, la position de cette origine, par rapport au couple nul, n'intervient pas. Mais cette indépendance est plus apparente que réelle; en premier lieu, les règles impliquent une vitesse nulle; en second lieu, elles impliquent un cycle fermé, et cette dernière condition est d'autant moins satisfaite que la bande où l'on veut fermer le cycle est plus large et plus éloignée du couple nul.

Même envisagées comme lois limites, sont-elles rigoureuses? A la vérité elles sont très approchées et toutes hypothèses plus simples sont fausses. Cependant il se pourrait que la forme de la courbe typique dépende un peu de la position de l'origine (*voir* notre Mémoire, § XIV), de la largeur et de la position de la bande où le cycle a été fermé.

Pour décider la question il faut de nouvelles expériences où toutes les précautions de continuité, de définition pour les parcours, de constance pour la température, se trouvent réalisées.

Enfin reste à expliciter la forme typique $C = \Phi(\alpha)$. Elle est approximativement représentée par l'équation suivante, due à M. Brillouin :

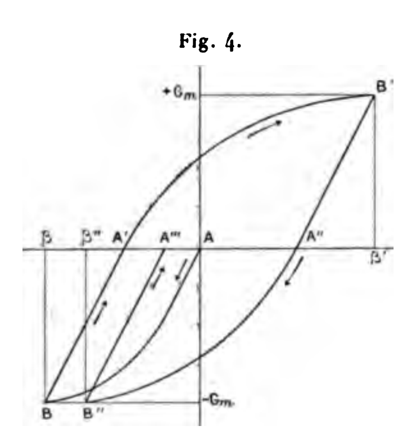
$$\alpha = \frac{C}{\Gamma} + B(e^{mC} - 1).$$

La courbe, d'abord presque rectiligne au début, s'infléchit ensuite rapidement.

Les règles précédentes sont en parfait accord avec les résultats de M. Wiedemann et avec ceux que M. Cantone a retrouvés pour la flexion et pour la torsion. Les expériences de ces savants sont loin de satisfaire aux conditions imposées; leurs appareils sont rudimentaires et leur technique imparfaite. De s'accorder avec les lois précédentes n'est peut-être pas pour leurs expériences une preuve de grande précision, puisqu'ils ne respectent pas les restrictions qui limitent l'application de ces lois.

L'appareil de M. Wiedemann permet de produire un couple donné et ses expériences consistent seulement à déterminer, non les courbes entières $C = \varphi(\alpha)$, mais seulement leurs extrémités; les vitesses de torsion $v = \frac{d\alpha}{dt}$ ne sont pas définies, les torsions sont produites par des poids appliqués d'une façon discontinue mais *sans choc*. L'appareil de M. Cantone est celui de M. Wiedemann avec des modifications insignifiantes; il détermine plusieurs points de la courbe de torsion, ce qui est un progrès, mais passe d'un point à l'autre d'une manière discontinue, non déterminée, en appliquant encore des couples sous forme de poids. Toutefois les expériences de M. Wiedemann sont faites avec une telle habileté qu'il a fait rendre du premier coup à sa méthode tout ce qu'elle pouvait donner.

Fig. 4.



Voici d'abord la terminologie de M. Wiedemann (*fig.* 4).

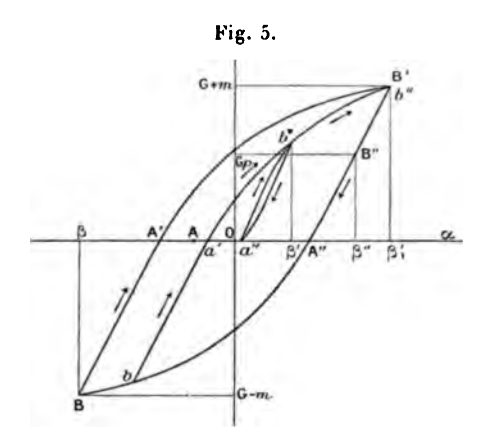
Partons du point A origine des coordonnées : décrivons le parcours AB, puis revenons suivant BA'. Les angles $A\beta$ et AA' sont les déformations temporaire et permanente.

Continuons suivant A′B′ et revenons suivant B′A″ : Aβ' et AA″ sont les nouvelles déformations temporaire et permanente. Ainsi ces déformations sont toujours comptées à partir du point fixe A. Ceci posé, voici la traduction et la discussion des § 5 et 6 du Mémoire (*Ann. Wied.*, t. VI), p. 485; ils ont trait à ce que M. Wiedemann appelle *un fil partiellement détordu :*

« Un fil est tordu dans un sens puis dans l'autre par des couples $\pm G_m$, jusqu'à ce que les torsions permanentes et temporaires $T_{\pm m}$ et $P_{\pm m}$ restent constantes. Si alors ce fil est de nouveau tordu dans le sens de la dernière torsion par des couples croissants, de manière que sa dernière torsion permanente P_p reste constante, les différences $T_p - P_p$ sont proportionnelles aux couples agissants. A peine pour de grands couples, le quotient $T_p - P_p/G_p$ croît-il légèrement. »

La *fig.* 4 donne la marche du phénomène au début. On part du point A et l'on fixe un cycle dans la bande comprise entre les couples égaux et de

Fig. 5.



signes contraires G_{+m} et G_{-m}. Après un certain nombre d'opérations le cycle est fermé (voir *fig.* 5).

Pour ce cycle fermé, d'après les définitions de M. Wiedemann :

$$A\beta'_1 = T_{+m}, \qquad A\beta = T_{-m}, \qquad AA'' = P_{+m}, \qquad AA' = P_{-m}.$$

Ces déformations temporaires et permanentes sont naturellement constantes, puisque, en répétant indéfiniment le cycle, on repasse toujours par les mêmes points.

Cette préparation effectuée, supposons qu'arrivé en A″ (*fig.* 5), au lieu de continuer le parcours, on revienne sur ses pas; on décrit, à partir du point A″ comme origine, une courbe typique. Or, approximativement,

entre le couple nul et le couple G_{+m}, ces courbes sont rectilignes; donc, en quelque couple $+G_p$ que l'on retourne à partir du point A″, on parvient très sensiblement en un point B″ de la branche descendante B′A″;

On retourne par suppression du couple au point A″ (P_p est constant);

Il y a proportionnalité entre la torsion $A''\beta'' = T_p - P_p$ et le couple employé.

M. Wiedemann remarque que cette proportionnalité n'est qu'approchée, c'est-à-dire que, même sur la longueur de la courbe typique qui correspond à une variation de couple $\leqq G_m$ à partir de son origine, la courbe n'est pas parfaitement rectiligne.

(Au § 21 de son Mémoire, il prétend que dans le parcours B′A″ le fil est parfaitement élastique, proposition erronée et contradictoire avec la remarque précédente.)

Les nombres donnés par M. Wiedemann conduisent encore à la conséquence suivante qui montre le vice de sa terminologie. Bien que, pour le cycle fermé, les courbes $\dot{B}A'B'$ et $\dot{B}'A''B$ soient identiques, $A\beta$ et $A\beta'_1$ et, par conséquent, AA′ et AA″ ne sont pas égaux. Le milieu O des droites A′A″ et $\beta\beta'_1$ ne coïncide pas avec le point de départ A; les parties *superposables* des deux courbes du cycle ne correspondent pas aux mêmes déformations temporaires et permanentes (*voir* notre Mémoire, Note du § I).

Passons à la seconde partie de la règle.

« Une certaine torsion P_{+m} étant obtenue par le poids G_m, qu'on la réduise à une valeur plus petite P_n comprise entre les limites $P_{\pm m}$ par un couple agissant en sens contraire. Qu'alors le fil soit de nouveau tordu par les couples $+G$; peu à peu la torsion permanente croît de P_n à P_{+m}. Qu'on retranche cette torsion permanente P_n de la torsion temporaire due au poids G, les différences $T - P$ sont toujours les mêmes, de quelque valeur P_n que l'on soit parti, pourvu que cette valeur soit comprise entre les limites P_{+m} et P_{-m}. »

Voici la transcription de cet énoncé bizarre : dans la région du plan où un cycle a été formé, les courbes de torsion rapportées à leur origine ont une forme invariable.

En effet, supposons (*fig.* 5) que le cycle $\dot{B}A'B' - \dot{B}'A''B$ soit fermé au début de l'expérience entre les couples G_m et G_{-m} et les azimuts $O\beta_1$ et $O\beta'$. Après avoir décrit la branche $\dot{B}'A''b$, arrêtons-nous en b et revenons suivant ba' : la torsion permanente est devenu $Aa' = P_n$; elle est bien comprise, comme le veut l'énoncé, entre $AA'' = P_{+m}$ et $AA' = P_{-m}$.

Ceci fait, continuons vers les couples croissants en décrivant les boucles $a'b'a''$, $a''b''a'''$, ... dont on n'a représenté que deux. M. Wiedemann dit que, pour le couple G_{+m}, la courbe $a^n b^n$ (dans la figure $a''b''$) passe par le point B', de sorte que la torsion permanente redevient $P_{+m} = AA''$, quand on supprime le couple G_{+m}, et cela quel que soit le point origine b.

C'est une conséquence nécessaire des règles énoncées. Si, au lieu de décrire d'un coup la courbe $ba'b'b''$, on s'arrête en b' et si l'on décrit, à partir du point b', la boucle $b'a''$, les deux courbes qui la forment sont typiques et l'on revient en b'; si alors on continue vers les couples croissants, on doit repartir sur la plus grande courbe typique qui se soit arrêtée en b' : c'est évidemment la courbe bab' et l'on parvient encore au point B'.

L'expérience citée par M. Wiedemann est encore plus complète. Il décrit non pas une, mais quatre boucles $b'a''$, $b''a'''$, ... avant de parvenir au point B', qui se trouve coïncider avec b^{iv} d'après ce qui vient d'être dit. Les couples qui limitent ces cycles sont : en bas le couple nul, en haut les couples $\frac{G_m}{4}$, $\frac{G_m}{2}$, $\frac{3G_m}{4}$, G_m. Les courbes de retour $b'a''$, $b''a'''$, ... sont typiques. Les longueurs $a''\beta'$, $a'''\beta''$, ..., qui sont les T — P de M. Wiedemann, sont donc indépendantes de la position du point b origine du système. Enfin, puisque les courbes $b'a''$, ... s'infléchissent sur la gauche, les quotients $b'\beta'/a''\beta'$, ... doivent décroître quand l'origine b' de la boucle se déplace vers B'. Jusqu'au moindre détail, les hypothèses suffisent à tout expliquer.

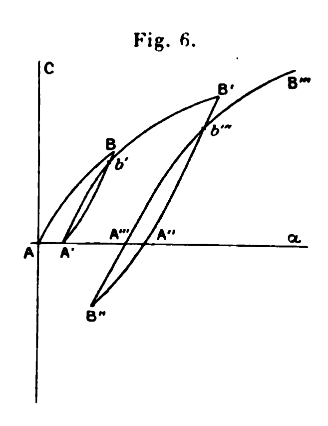
Au § 6 de son Mémoire, M. Wiedemann remarque qu'un fil, qui a pris par des torsions répétées une torsion permanente $P_{+m} = AA''$, éprouve de la part de couples $-G$ dirigés en sens contraire du dernier couple agissant $(+G_m)$ des torsions temporaires plus grandes que si ces mêmes couples agissaient dans le sens $+G_m$. En effet, lorsque venant de B'A'' on continue suivant A''B, c'est véritablement une seule et même courbe typique que l'on décrit. Si l'on revient sur ses pas à partir de A'', c'est une nouvelle courbe typique que l'on recommence.

M. Cantone, en se servant de méthodes expérimentales identiques, a naturellement retrouvé pour la flexion et la torsion les mêmes phénomènes. La remarquable coïncidence des résultats expérimentaux et des règles posées n'est pas une preuve de précision pour les expériences, car, avec la technique de ces savants, les résultats devraient s'écarter notablement des hypothèses énoncées. Celles-ci doivent être d'autant moins vérifiées que les conditions imposées dans leur énoncé sont moins satisfaites. Aussi

la règle suivante, due à M. Wiedemann [règle 8 (*Pogg. Ann.*, t. CVI)], qui coïncide avec elles, mais sans que les conditions imposées soient même approximativement réalisées, n'est plus qu'une grossière approximation.

La torsion permanente AA′ d'un fil (*fig.* 6) [acquise par suite d'un parcours ABA′ par exemple] est portée par un couple C à la valeur AA″

Fig. 6.



[parcours A′B′A″], puis à la valeur AA‴ [parcours A″B″A‴] intermédiaire entre AA′ et AA″. Elle doit acquérir de nouveau la valeur AA″, sous l'influence du couple C. Peu importe que A′ et A″ soient à droite ou à gauche de A.

En d'autres termes, c'est au point B′ que, suivant M. Wiedemann, va passer la courbe A‴*b*‴B‴. Or le cycle n'est pas fermé; ni B′A″B″, ni B″A‴*b*‴ ne sont typiques : le point d'intersection des courbes est audessous du point B′ et les limitations imposées par M. Wiedemann ne l'empêchent pas.

PARCOURS A VITESSE NULLE, MAIS NON TYPIQUES.

Le problème de la forme des courbes devient immédiatement plus compliqué : il est nécessaire de distinguer plusieurs cas.

Courbe typique du fil neuf.

Prenons un fil qui n'a jamais servi ou qui vient d'être recuit à haute température; supposons-le parfaitement homogène et tordons-le. La courbe décrite est parfaitement déterminée. Cependant elle n'a plus la forme typique $C = \Phi(\alpha)$: la partie rectiligne est beaucoup plus courte, l'infléchissement se produit plus tôt, presque au début. C'est donc une nouvelle

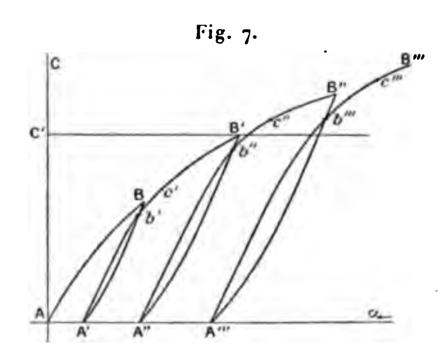
courbe caractéristique que nous appellerons *courbe typique du fil neuf* et représenterons par le symbole $C = \Phi_1(\alpha)$. L'expérience montre que, pour $\alpha = 0$, on a $d\Phi_1/d\alpha = d\Phi/d\alpha = \Gamma$: la tangente à l'origine de cette nouvelle courbe a l'inclinaison caractéristique.

A priori cette courbe, pour répondre à sa définition, doit être décrite d'un coup : on part du couple nul et l'on tord indéfiniment (la rupture ne se produit d'ailleurs que pour des torsions énormes). Ceci fait, par aucun procédé, sinon le recuit, il n'est possible d'obtenir à nouveau une portion de cette courbe.

On a essayé d'écarter ces restrictions : MM. Wiedemann et Cantone ont énoncé à plusieurs reprises comme rigoureuses des règles approchées. Leur appareil de mesure était à indications discontinues et leur technique limitait la précision de leurs expériences.

Reportons-nous à la *fig.* 7 : supposons qu'au lieu de décrire d'un coup

Fig. 7.



la courbe typique du fil neuf, nous nous arrêtions au point B, décrivions la boucle $BA'b'$, continuions suivant $b'c'B'$, décrivions la boucle $B'A''b''$, ... D'après MM. Wiedemann et Cantone :

Les points b', b'', ... coïncident avec les points B, B', ...

Les portions AB, $b'B'$, $b''B''$, ... forment une seule et même courbe qui est la courbe typique du fil neuf.

A cause de leur appareil, ils décrivent toujours les courbes intermédiaires $BA'b'$, $B'A''b''$, ... jusqu'au couple nul : mais cette limitation est évidemment arbitraire. M. Wiedemann (*Pogg. Ann.*, t. CVI, Règle 6) généralise la règle qui devient encore moins admissible. « Quand on tord, dit-il, par l'action de forces supérieures à celles qu'on a précédemment employées à tordre ou à détordre, l'effet est le même que si l'on tordait pour la première fois. » Il suffirait donc, par exemple, qu'on n'eût jamais dépassé le couple C'

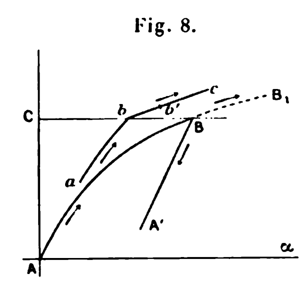
correspondant au point B′, pour que, si, dans un parcours quelconque postérieur, on traversait l'horizontale C′B′, la courbe de torsion, à partir de cette horizontale vers le haut, soit la continuation de la courbe ABB′, typique pour le fil neuf : ce qui n'est pas.

L'expérience montre que les points b', b'', ... sont au-dessous de B′, B″, ... (*fig.* 7). Il n'y a pas de doutes, si l'on emploie des appareils à indications continues, puisqu'il suffit de constater, dans des conditions identiques, si le couple redevient exactement le même à deux passages successifs par un même azimut dans le même sens.

Malgré cela, la seconde Règle pourrait subsister en partie. Rien n'empêche que, par un raccordement $b'c'$, le parcours ne vienne se superposer suivant c'B′ au prolongement analytique de la courbe typique du fil neuf AB; de sorte que l'on aurait cette courbe $C = \Phi_1(\alpha)$, tracée dans le plan par portions successives, AB, c'B′, c''B″, ... Ce point est difficile à décider expérimentalement, car, pour voir si c'B′ est la continuation de AB, il faudrait connaître d'avance la courbe $C = \Phi_1(\alpha)$ et avec une grande approximation. Or elle ne peut se décrire qu'une fois; il faut ensuite recuire le fil. Donc il serait nécessaire de recuire le fil plusieurs fois de suite exactement de la même manière, ce qui est presque impossible.

La seconde Règle, très improbable, devient à coup sûr insoutenable

Fig. 8.



avec la généralisation de Wiedemann. En effet, décrivons (*fig.* 8) AB sur la courbe typique du fil neuf, arrêtons en B et décrivons des parcours BA′, etc.; sans même dépasser le couple — C égal et de signe contraire au couple C correspondant au point B, on peut, après un nombre plus ou moins grand de parcours, revenir suivant ab en un point b dont la distance au point B peut être considérable. La tangente à la courbe ab au point b est très différente de la tangente en B à la courbe AB. Or, l'expérience montre qu'il n'y a pas en b de point anguleux. Donc : 1° le point b ne

coïncide pas avec B; 2° la courbe au delà du point *b* n'est même pas le résultat de la translation parallèle de la courbe BB_1.

Il est évident que moins les boucles sont étendues et nombreuses, mieux s'appliquent les Règles de MM. Wiedemann et Cantone. Nous reviendrons, plus loin, sur le cas de la courbe typique du fil neuf, dentelée par des parcours très petits mais très nombreux.

Voici encore quelques énoncés dus à M. Wiedemann qui se déduisent immédiatement des principes posés [Règles 1, 2, 3 (*Pogg. Annalen*, t. CVI)] :

Les torsions temporaires produites par des poids croissants sur un cylindre tordu pour la première fois augmentent plus vite que ces poids.

Les torsions permanentes croissent encore bien plus vite.

Pour détordre il faut une force bien moins considérable que pour tordre.

On trouve, dans la *Physique* de Jamin et Bouty, un énoncé plus complet que voici :

« Quand, après avoir tordu un fil par un couple C suffisant pour qu'il conserve une torsion permanente notable, on le tord en sens contraire par un couple médiocre, la torsion temporaire produite par celui-ci se superpose à la torsion permanente acquise sans la détruire; car, si l'on supprime l'action de ce couple, le fil revient à sa position d'équilibre modifiée. Toutefois, pour détruire la torsion permanente, il suffit de faire agir, en sens contraire, un couple C″ inférieur à C. »

Cet énoncé n'apprend rien de plus que le précédent; il montre nettement les vices de la terminologie de Wiedemann et conjointement le rôle erroné qu'il fait jouer à la soi-disant torsion permanente. On ne détruit pas les effets de la torsion permanente en s'arrangeant de manière à repasser, pour le couple nul, par le point du plan d'où l'on est parti au début de l'expérience. A ce nouveau passage, le fil n'a plus ses propriétés initiales; on ne peut plus, par exemple, lui faire parcourir de nouveau la courbe typique du fil neuf. M. Cantone tombe dans la même erreur, quand il s'imagine qu'on peut ramener un métal à l'état neuf par des parcours symétriques par rapport au couple nul et d'amplitudes décroissantes : il ne fait que résoudre ce problème tout différent, *amener en un point de l'axe des azimuts la position d'équilibre du fil,* ce qu'on peut toujours faire d'une infinité de manières (*Journal de Physique;* 1896).

Parcours quelconques à vitesse nulle non typiques. Accommodation.

Entre la courbe typique du fil neuf $C = \Phi_1(\alpha)$ et les courbes typiques des cycles fermés $C = \Phi(\alpha)$, il y a toute une série d'intermédiaires. Les transformations par lesquelles les courbes de torsion se rapprochent de la forme typique Φ peuvent s'appeler *accommodation*. Quand les courbes d'aller et de retour d'un cycle ne sont plus identiques, le cycle n'est plus fermé; il est animé dans le plan d'un mouvement rampant. On trouvera l'énoncé des lois de ces mouvements dans notre Mémoire, § XV et suiv., ainsi que l'étude de toutes les dissymétries qui se produisent par le fait des premières torsions du fil neuf.

Rappelons que les courbes Φ et Φ_1 ont la même tangente Γ à l'origine; que toutes les courbes intermédiaires des cycles non fermés admettent eux aussi cette même tangente. A partir de cette tangente Γ à l'origine, c'est sur Φ_1 que le γ décroît le plus rapidement, sur Φ que le γ décroît le plus lentement; toutes les courbes des cycles non fermés jouissent de propriétés intermédiaires.

Nous sommes, maintenant, à même de juger les deux propositions suivantes :

M. Warburg, pour expliquer certains phénomènes (*Wied. Ann.*, t. X), émet l'hypothèse que le fil, primitivement isotrope, cesse de l'être par la torsion, de sorte que le coefficient de torsion devient moindre dans un sens que dans l'autre. Tout au contraire, l'expérience montre que, même dans le cas d'une dissymétrie évidente due aux torsions premières, le Γ reste le même sur toutes les courbes.

M. Wiedemann, dans la Règle 4 de son Mémoire (*Pogg. Ann.*, t. CVI) parle de la fermeture des cycles : « Par suite de torsions répétées, dit-il, les torsions s'approchent de plus en plus d'être proportionnelles au poids tordant. Elles sont d'ailleurs ***supérieures*** à la première torsion produite par ces poids. » La seconde partie de la Règle, évidemment fausse, est religieusement répétée par les Traités classiques : on croirait à un lapsus, s'il n'y avait en regard la même proposition pour le magnétisme.

PARCOURS A VITESSE NON NULLE.

CYCLES FERMÉS.

Lorsque la vitesse de torsion n'est plus nulle, le quotient $\frac{dC}{d\alpha}$ peut prendre, en chaque point du plan, toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$. Bornons-nous d'abord aux cycles fermés et choisissons pour la loi de torsion $\alpha = f(t)$ des formes simples.

Oscillations sinusoïdales.

Le cas le plus simple est celui des oscillations sinusoïdales : par un procédé quelconque on suppose la torsion entretenue indéfiniment suivant la loi $\alpha = A \sin \omega t$; on se propose d'étudier la forme du chemin parcouru. Ce problème est plus général que celui à la solution duquel se sont attachés tous les expérimentateurs; car on peut pratiquement obtenir de tels cycles fermés entre deux couples qui ne sont pas égaux et de signes contraires, à la condition de ne pas se servir de la méthode jusqu'à présent toujours employée (disque suspendu à l'extrémité du fil et dont on étudie plus ou moins complètement la loi du mouvement). D'autre part, les expériences faites par cette dernière méthode ne satisfont pas aux conditions exigées : les cycles ne sont pas fermés. La loi d'oscillation a la forme $\alpha = A f_1(t) \sin \omega t$, où f_1 est une fonction décroissante du temps : il y a amortissement et l'énergie n'est pas restituée.

Pour parcourir un cycle fermé, il faut dépenser un certain travail qui est mesuré par l'aire enveloppée par les courbes de torsion : proposition générale et tout à fait indépendante de la forme des courbes. Ainsi dans le cas des cycles sinusoïdaux, si l'on admet avec Coulomb, pour unique cause de l'absorption d'énergie, un frottement proportionnel à la vitesse, la courbe de torsion $C = \varphi(\alpha)$ est une ellipse. Cette ellipse admet comme diamètre des cordes verticales la droite $C = \Gamma \alpha$; son aire est proportionnelle à l'inverse de la période et au carré de l'amplitude.

Il est donc inutile de chercher à vérifier expérimentalement que l'amortissement pendant les oscillations peut être calculé d'après la connaissance de la forme des courbes de torsion; car le résultat n'est pas douteux, à supposer qu'on puisse donner aux expériences une précision suffisante. Mais nous avons démontré (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse;* 1897) à quel point l'air intervient pour amortir les oscillations de

grande amplitude et que la correction de son effet est impossible dans l'état actuel de nos connaissances.

Nous avons à résoudre un double problème tout différent :

Les courbes de torsion sont-elles indépendantes de la période, pour une amplitude donnée? Si ces courbes sont indépendantes de la période, peut-on calculer l'amortissement pendant les oscillations *par la connaissance des courbes du cycle fermé parcouru à vitesse nulle* entre les mêmes couples? D'après le plus ou moins de concordance entre les amortissements mesurés expérimentalement pendant les oscillations pour différentes périodes et la mesure de l'aire du cycle fermé à vitesse nulle, on pourrait essayer de répondre aux questions posées.

Peut-être est-ce là le problème que M. Cantone cherchait à résoudre (*Nuovo Cimento*, 4e série, t. I); mais, si le principe de la méthode est inattaquable, elle ne pouvait rien donner telle qu'il l'a appliquée. Les deux termes de la comparaison sont entachés d'erreurs. Les parcours sont décrits d'une manière discontinue, sans aucune précaution qui permette de les assimiler à des parcours à vitesse nulle ou sinusoïdaux à longue période. Pendant l'oscillation la partie de l'amortissement qui est due au fil est presque impossible à distinguer dans l'amortissement total, à moins qu'il ne soit très grand, auquel cas la condition fondamentale que le cycle est fermé n'est pas satisfaite. Il est tout à fait inadmissible de déclarer, comme le fait M. Cantone, que cette correction est négligeable.

M. Cantone conclut de ses expériences que l'amortissement est dû, en majeure partie, à l'hystérésis. Cette expression (retard), qui implique l'idée de temps, doit signifier ici que le temps se trouve précisément à exclure, que la perte d'énergie ou la forme des courbes qui limitent l'aire du cycle sont à peu près indépendantes de la période.

Voici longtemps que M. Wiedemann était arrivé à la même conclusion, et il ne semble pas, malgré le grand nombre de ses expériences, que M. Cantone ait beaucoup avancé la question. Dans les § 21 et suivants de son Mémoire (*Wied. Ann.*, t. VI), M. Wiedemann dit que l'on ne peut pas attribuer la perte d'énergie à un frottement intérieur fonction de la vitesse seule; que les effets dus à la vitesse n'entrent que pour une faible part dans la perte d'énergie en d'autres termes, modifient peu les courbes qui limitent le cycle. Mais M. Wiedemann attribue à ces courbes une forme qu'elles n'ont pas, et les expériences sur lesquelles il appuie son opinion prêtent aux mêmes critiques que celles de M. Cantone qui sont tout à fait analogues.

Pour résoudre le problème que nous avons posé, il n'y a pas le choix des méthodes. Il faut déterminer directement $C = \varphi(\alpha)$ en faisant varier la période et l'amplitude d'oscillation et mesurant à chaque instant l'azimut et le couple. Nous avons déjà montré que l'expérience est possible (*Annales de Toulouse;* 1897); nous reviendrons sur la technique et les résultats dans un prochain Mémoire.

Pour le moment on peut seulement affirmer : que les courbes dépendent de la période surtout à leurs extrémités où le point anguleux est remplacé par un arrondissement continu; que pour des cycles de plus en plus petits les courbes sont modifiées de moins en moins par la période; que la majeure partie de la perte d'énergie est indépendante de la période; enfin, l'extrapolation indiquerait que pour les petits parcours l'aire du cycle est proportionnelle au cube de l'amplitude, ou, ce qui revient au même, la variation relative d'amplitude $\frac{\Delta A}{A}$ est proportionnelle à l'amplitude.

Si cette extrapolation restait légitime jusqu'aux plus petites amplitudes, l'amortissement devrait diminuer très rapidement et devenir pratiquement insensible bien avant que les amplitudes ne soient nulles. Or il semble établi qu'il n'en est point ainsi par les remarquables expériences de Tomlinson (*Phil. Trans.*, 1886). Pour de très petites oscillations, Tomlinson trouve que l'aire des cycles est proportionnelle seulement au carré de l'amplitude. De plus, cette aire s n'est pas indépendante de la période τ; on aurait $s = a + b\tau - c\tau^2$.

La méthode de Tomlinson est celle des oscillations; comme les amplitudes sont très petites, l'auteur a pu éliminer exactement l'influence de l'air. Bien que cette correction soit parfois les deux tiers du phénomène total, il n'y a aucune raison de suspecter les résultats.

Il résulte de ceux-ci :

Que, même pour des parcours très petits, les deux courbes ascendante et descendante limitant le cycle ne se superposent pas exactement;

Que cette non-superposition subsiste encore pour une période très grande;

Que, dans le cas de parcours extrêmement petits, la période intervient et a relativement plus d'influence que dans le cas des grands parcours.

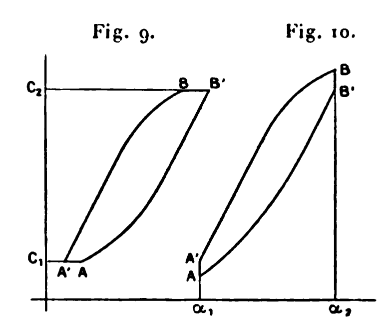
La perte d'énergie est ainsi due en partie à une viscosité qui n'a pas les caractères de la viscosité imaginée par Coulomb. D'autres règles énoncées par Tomlinson conduisent à cette même conclusion que les règles applicables à de grands parcours ne sont pas applicables aux petits. Pour trancher

définitivement la question, il faudrait opérer dans le vide dans le cas des petites oscillations où la détermination directe des courbes $C = \varphi(\alpha)$ devient incertaine. Il n'y aurait pas des difficultés insurmontables, et l'on éviterait au moins en partie l'action de l'air, dont il est si malaisé de tenir compte.

Parcours alternatifs à vitesse constante avec arrêts aux extrémités.

Un autre cas très important comprend les phénomènes que les Allemands appellent *Elastische Nachwirkung*. Entre deux couples C_1 et C_2, on décrit la branche AB (*fig.* 9) avec une vitesse uniforme $v = \frac{d\alpha}{dt}$; on s'arrête en B un temps T, et l'on parcourt à couple constant le chemin BB' : on

Fig. 9. Fig. 10.



détord suivant B'A jusqu'au couple C_1 ; on s'arrête un temps T. Si l'opération a été répétée un certain nombre de fois, le cycle se ferme. On peut décrire des parcours analogues entre deux azimuts déterminés α_1 et α_2, la vitesse restant constante, ainsi que les temps d'arrêt aux extrémités (*fig.* 10).

Quand la courbe se ferme, il n'y a plus identité entre les courbes A'B et B'A; elles ne sont pas superposables (leurs origines A' et B' étant naturellement amenées l'une sur l'autre et l'une des courbes subissant autour de cette origine une rotation de 180°). Le cycle peut être pratiquement fermé, bien que les deux longueurs AA' et BB' soient notablement différentes. Quand la vitesse n'est pas nulle, il n'y a plus de courbes typiques; la forme des courbes, dans un même cycle fermé, dépend de la vitesse v de torsion et de la durée T des arrêts.

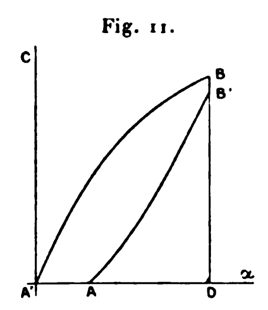
Ces phénomènes ont été découverts par Weber et étudiés par un grand nombre de savants, dans un cas particulier mal commode et suivant une méthode défectueuse. Voici, par exemple, comment opérait Kohlrausch

qui a publié sur ce sujet la série de Mémoires la plus complète (principalement *Pogg. Ann.*, t. CXXVIII-CLVI).

L'extrémité supérieure du fil est attachée dans l'axe d'un cylindre qui permet de le tordre d'un angle connu. Son extrémité inférieure porte une pièce de cuivre munie d'un bras horizontal qui, dans la position initiale d'équilibre, s'appuie sans force contre une pièce fixe. La masse de cuivre plonge en partie dans un godet d'huile; le miroir qu'elle porte sert à mesurer ses petits déplacements angulaires. Lorsqu'on tord le fil par en haut, le bras appuie sur son buttoir et maintient constant l'azimut de l'extrémité inférieure du fil.

Pour faire une expérience (*fig.* 11), on tord par en haut d'un certain

Fig. 11.



angle AD $= \alpha_1$; cette torsion se fait à la main suivant une loi indéterminée. On décrit ainsi la branche A'B. On maintient l'azimut constant pendant un temps T, le couple décroît suivant BB'. On détord à la main de l'angle primitif. Cette détorsion correspond à des phénomènes compliqués; il faut la diviser en deux parties dont les grandeurs sont mesurées par les droites DA et AA'. Pendant la détorsion DA, le couple diminue jusqu'à o; pendant la détorsion complémentaire mesurée par AA' = A'D — AD, le bras horizontal inférieur ne s'applique plus contre son buttoir. Le point figuratif du phénomène reste en A, puisque alors l'extrémité inférieure suit l'extrémité supérieure et se déplace d'un angle égal. En fait, il se produit de petites oscillations rapidement éteintes par l'huile, mais qui peuvent troubler profondément les résultats.

Ces préliminaires effectués, l'expérience consiste à déterminer la loi suivant laquelle le point A se déplace à couple nul vers le point A' : le cycle se ferme ou ne se ferme pas suivant les cas.

Ainsi le cycle est décrit entre couple inférieur nul et azimut constant α_1; les branches A'B et BA' sont parcourues avec des vitesses inconnues et quel-

conques; enfin, avant qu'on puisse faire une mesure, il se produit des oscillations autour du point A. Il serait étonnant qu'on parvienne dans ces conditions à des lois simples et générales.

Soit x le déplacement du miroir de A vers A′ compté en unités et à partir d'une origine arbitraire. Soient α l'angle de torsion, T le temps pendant lequel la torsion α a été maintenue. Kohlrausch a cherché à relier ces quantités par une expression de la forme suivante :

$$x = t^{\delta}\,T^{\beta}(A\alpha_1 + B\alpha_1^2), \qquad 0 < -\delta < 1, \qquad 0 < \beta < 1.$$

Si le phénomène était observé pendant un temps très long, Kohlrausch employait une formule plus compliquée

$$x = e^{-at^{\delta}}\,T^{\beta}(A\alpha_1 + B\alpha_1^2).$$

Ces formules représentent bien les expériences, sans nous apprendre quoi que ce soit sur le phénomène; car il est évident que celui-ci est la résultante d'une série d'actions dont la technique de Kohlrausch ne permet pas de séparer les effets.

Reprenons les parcours simples représentés dans les *fig.* 9 et 10. Il est naturel de chercher à relier la loi suivant laquelle les portions rectilignes du cycle sont parcourues, aux propriétés de la courbe avant le point d'arrêt et à la vitesse v avec laquelle elle est parcourue. Or les propriétés de la courbe sont, comme première approximation, déterminées par la valeur du couple au point d'arrêt et l'inclinaison de la tangente; donc la loi à chercher doit contenir, comme première approximation, la vitesse v, le couple C et l'inclinaison $\frac{dC}{d\alpha}$ de la tangente au point d'arrêt. Si l'expérience montre qu'une telle relation n'existe pas, alors seulement on devra chercher quelque chose de plus compliqué, introduire plus intimement la forme de la courbe, en admettant l'influence de la courbure au point d'arrêt, ce qui revient à faire intervenir $\frac{d^2C}{d\alpha^2}$.

C'est la marche que nous avons suivie dans notre Mémoire (§ XXVI et suivants). La formule de Kohlrausch est loin de contredire cette manière de voir; car, en admettant pour représenter la courbe B′A une expression de la forme $C = \Gamma\alpha - M\alpha^2 - N\alpha^3$, l'origine des coordonnées étant transportée au point B′ et les axes tournés de 180°, on a, pour le point A,

$$\gamma = \frac{dC}{d\alpha} = \Gamma - 2M\alpha - 3N\alpha^2; \qquad \text{d'où} \qquad \Gamma - \gamma = 2M\alpha + 3N\alpha^2.$$

La différence entre Γ et le γ au point A est quadratique en α et la loi de Kohlrausch pourrait s'énoncer en disant que, toutes choses égales d'ailleurs, le mouvement de A vers A′ se fait avec des vitesses proportionnelles à la différence entre la tangente et la courbe de torsion en A et la tangente caractéristique de la courbe. C'est une loi que nous avons énoncée.

Le problème, pour être complètement résolu, exige encore des travaux longs, minutieux, mais surtout dirigés systématiquement.

L'expression *effet tardif élastique* établit entre ces derniers phénomènes et ceux qui existent constamment quand la vitesse est variable, une distinction tout arbitraire. On a généralement $dC = \frac{\partial C}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial C}{\partial t} dt$; on ne conçoit pas l'utilité de donner un nom spécial à l'un des coefficients différentiels $\frac{\partial C}{\partial t}$, seulement lorsque le premier coefficient est nul. Il suffit de dire, sans introduire un nom spécial, que la variation de couple se fait à azimut constant ou à couple constant.

CYCLES NON FERMÉS.

Dans ce groupe doivent théoriquement rentrer *tous* les parcours que l'expérience permet d'obtenir, puisqu'en somme *tous* les cas déjà traités sont des cas limites qu'on ne peut strictement atteindre. Pratiquement, nous ferons rentrer, dans ce groupe, les expériences où les conditions précédemment énoncées ne sont pas du tout réalisées, et nous n'indiquerons que les plus simples.

Courbe du fil neuf à vitesse constante.

La courbe pour une vitesse constante v a une forme typique que nous représenterons par le symbole $C = \Phi_1(\alpha, v)$. L'influence de la vitesse v de torsion, insensible au début, n'apparaît que pour les torsions considérables. Encore est-il difficile de la mettre en évidence pour les raisons indiquées (p. 18).

La courbe générale du fil neuf $C = \Phi_1(\alpha, v)$ ne peut être parcourue qu'une fois. Si l'on ajoute des boucles, elles doivent être parcourues à vitesse constante v, et les arrêts doivent avoir la même durée T, si l'on ne veut pas rendre le problème inextricable. Le premier exemple d'un tel cas se trouve dans Wiedemann (§ 3, *Wied. Ann.*, t. VI); malheureusement, les conditions que nous venons d'énoncer ne sont pas satisfaites, et l'on ne

peut rien conclure de cette expérience. *A fortiori*, dans le cas des vitesses non nulles, les règles énoncées par Wiedemann sur le parcours de la courbe des fils neufs par fragments sont inexactes.

Courbe du fil neuf à vitesse ondulatoire.

Un autre mode simple de décrire la courbe d'un fil neuf est d'employer une vitesse de la forme $v = v_0 + a \sin \omega t$; la courbe obtenue, très curieuse, est étudiée dans notre Mémoire (§ XLI). Les vitesses constante, sinusoïdale et ondulatoire sont pratiquement les trois seules formes que l'expérience permet de réaliser commodément et avec rigueur.

Courbes quelconques à vitesse non nulle.

Le mode de fixation des cycles dont les courbes sont parcourues à vitesse non nulle est naturellement très compliqué. On doit se borner à l'étude bien définie des cas les plus simples qui sont : Les oscillations sinusoïdales à amplitude constante ou variable suivant une loi simple ;

Les parcours à vitesse constante et arrêts de durée constante aux extrémités entre azimuts ou couples constants.

La majeure partie des travaux écrits sur la question ne pourront jamais être utilisés, parce que la manière de décrire les cycles n'a pas été déterminée avec assez de soin.

INTRODUCTION D'UNE NOUVELLE VARIABLE.

Le problème, déjà compliqué quand on suppose variable la torsion seule, devient presque inextricable, quand on ajoute une seconde variable, telle que la température, l'aimantation, la tension, etc. On est toujours forcé de maintenir la torsion comme variable, parce qu'un fil qui n'a jamais été tordu ne se tord pas au changement ni de température, ni de tension, etc. Le nombre des expériences sur l'influence d'une seconde variable est énorme : elles ne nous apprennent généralement rien, parce qu'elles sont faites dans des conditions telles qu'on ne peut y démêler l'influence entre les différentes causes.

Pour débrouiller la question, il faudrait se limiter à l'un ou l'autre des cas généraux suivants. Supposons qu'il s'agisse de l'action de la température.

Premier cas : cycles fermés.

On ferme un cycle à vitesse nulle ou à vitesse suivant une loi déterminée, pour une valeur T_1 de la température: on détermine la forme I du cycle.

On passe suivant une loi arbitraire de la température T_1 à la température T_2.

On cherche la nouvelle forme II du cycle.

On revient suivant une loi arbitraire de la température T_2 à la température T_1.

On cherche la nouvelle forme I′ du cycle, etc.

On peut admettre, comme première approximation, que les formes I et II des cycles sont indépendantes de la loi arbitraire de passage de T_1 à T_2, parce que ces cycles sont fermés, à la condition qu'on passe de T_1 à T_2 sans sortir de l'intervalle $T_1 T_2$. Il se peut qu'en revenant à la température T_1, la forme I′ ne coïncide pas avec I. Il faut recommencer la double série d'expériences jusqu'à ce que I^n coïncide avec I^{n+1}; on compare alors les formes I^{n+1} et II^{n+1}.

Second cas : variations continues de la seconde variable.

En opérant sur des cycles fermés, on peut faire passer la seconde variable de sa première à sa seconde valeur suivant une loi arbitraire et, par conséquent, non déterminée expérimentalement. Ce n'est plus admissible si les parcours sont quelconques ou si le phénomène dépend, évidemment, de cette loi de variation. Alors il faut prendre pour la seconde variable les mêmes précautions que pour la torsion; c'est-à-dire connaître à chaque instant le mode de variation. On ne peut tolérer en aucun cas des variations brusques. Que penserait-on du savant qui, pour étudier la compressibilité du plomb, taperait sur un morceau de plomb à coups de marteau? C'est pourtant avec cette précision que la plupart des expériences ont été faites : cycles non fermés, parcours quelconques mal déterminés, variation brusque de la seconde variable.

Non seulement la seconde variable doit toujours varier d'une manière continue, mais on doit s'efforcer de rendre cette loi de variation, analogue à la loi de variation de l'azimut. Par exemple, on tord un fil suivant la loi sinusoïdale $\alpha = A \sin \omega t$ et l'on veut opérer à aimantation variable. La plupart des expérimentateurs aimantent et désaimantent toutes les n se-

condes et parviennent ainsi à d'inutiles généralités. Il serait plus naturel de produire une aimantation représentée par la loi $I = I_0 + I_1 \sin(\omega' t - \varphi)$, ω' étant égal à ω, φ ayant une valeur bien déterminée. Ce résultat est assez difficile à obtenir expérimentalement, mais les phénomènes compliqués ne s'étudient pas avec des appareils rudimentaires. On pourrait ensuite chercher l'influence d'un battement entre les deux variables (ω' peu différent de ω); enfin, troisième cas sur lequel nous reviendrons plus loin, on pourrait prendre ω' très grand vis-à-vis de ω.

Pour montrer comment ont été généralement faites les expériences, on peut citer celles de Wiedemann sur la tension (§ 8 à 14, *Wied. Ann.*, t. VI).

Dans les § 8, 9, 10, Wiedemann ferme des cycles *entre le couple nul et un azimut invariable,* sans spécifier la vitesse avec laquelle les parcours sont décrits. Ceci fait, il modifie la tension tantôt à un bout, tantôt à l'autre bout du cycle, pendant l'arrêt, et détermine les mouvements rampants qui se produisent alors par la répétition du cycle.

Au § 11, il reprend les mêmes expériences entre le couple nul et un couple invariable; la définition du cycle est un peu plus simple, mais les vitesses ne sont pas mieux connues que précédemment.

Au § 12, il s'agit d'un fil neuf et de parcours analogues à ceux de la *fig.* 7; les boucles paires sont faites avec une tension, les impaires avec une autre : il est difficile de choisir un cas plus compliqué.

Enfin, au § 14, la tension varie pendant des parcours à couple constant; c'est ici qu'il serait encore plus nécessaire de définir la loi de variation de la tension.

Il est inutile de discuter les résultats d'ailleurs assez vagues de ces expériences; on ne sait pas bien à quoi ils correspondent.

Il est de même regrettable que, dans ses expériences sur l'influence de la température, M. Cantone n'ait pas défini et fermé ses cycles. Pour que l'aire des cycles soit définie, faut-il encore connaître la loi suivant laquelle les parcours sont décrits; cette loi intervient de plus en plus à mesure que la température augmente et que le fil devient plus pâteux.

Heureusement, dans les expériences de M. Tomlinson, bien des précautions étaient rendues inutiles par la nature du phénomène lui-même. L'amortissement pour de petites oscillations est assez faible pour que le cycle puisse être considéré comme fermé.

Il serait donc à souhaiter que les savants abandonnent, dans ces re-

cherches difficiles, des errements qui enlèvent toute valeur à tant de patientes recherches.

EFFETS D'ÉBRANLEMENT ET FATIGUE D'ÉLASTICITÉ.

M. Wiedemann appelle *effets d'ébranlement* (*Erschütterungswirkung*), des actions « par lesquelles les molécules sont rendues plus mobiles et se placent plus facilement dans les positions d'équilibre correspondant aux forces agissantes. Ces actions n'ont aucune composante en concordance directe avec le sens actuel du déplacement des molécules et sont indépendantes des forces qui produisent les déformations actuelles. » (*Wied. Ann.*, t. VI, § 16). Une telle définition ne nous apprend pas grand'chose. Assurément, une tension et une torsion peuvent n'avoir aucune composante commune *si l'on n'introduit pas de liaisons;* mais, dans un système dont les liaisons sont inconnues, une tension peut avoir comme seul résultat une torsion et l'on ne peut *a priori* les considérer comme indépendantes. Il faudrait, d'ailleurs, donner une mesure de la mobilité des molécules et expliquer cette mobilité.

Les secousses ou ébranlements ne sont pas quelque chose de particulier : ils consistent en l'action de causes définissables, mais utilisées d'une manière non définie. Par exemple, un choc est un ébranlement; mais c'est aussi une succession dans un ordre inconnu de vibrations longitudinales et transversales, de tensions et de pressions exercées suivant des lois quelconques. Cet ensemble ne doit pas être traité comme un tout mais décomposé en phénomènes plus simples et expérimentalement plus abordables.

La seule définition admissible pour les ébranlements est la suivante : un ébranlement simple est l'action d'une petite cause appliquée suivant une loi sinusoïdale à très courte période. L'effet d'un ébranlement est celui d'une dentelure des courbes de torsion, ou, si l'on veut, du remplacement d'une courbe continue par une courbe présentant un très grand nombre de boucles très petites.

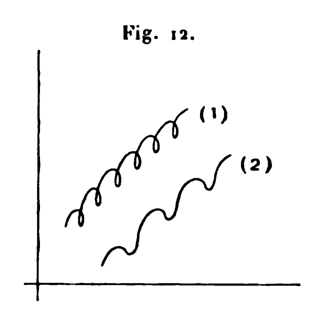
Voici une application de ce qui précède. M. Wiedemann (*Pogg. Ann.*, t. CVI) donne les Règles suivantes :

9. Des secousses pendant l'action d'un couple augmentent la torsion du fil.

10. La torsion permanente du fil après suppression du couple est diminuée par l'action des secousses.

Admettons qu'il soit possible d'assimiler l'effet des secousses à l'influence d'une vitesse de torsion non plus constante, mais donnée par la formule $v = v_0 + v_1 \sin\omega t$, ω ayant une valeur très grande. La courbe de torsion présente une sorte de dentelure qui, suivant les valeurs relatives de v_0 et v_1, a l'aspect de l'une des courbes (1) et (2) de la *fig.* 13. Or, cette den-

Fig. 12.



telure a précisément les effets exigés par la Règle 9 : le couple correspondant à un azimut donné est diminué, ou, ce qui revient au même, la torsion du fil est augmentée.

Supposons que, conformément à la Règle 10, on supprime le couple et qu'alors on ébranle le fil. C'est comme si l'on décrivait de petits parcours autour de la position d'équilibre actuelle; à cause de la dissymétrie imposée à ces parcours par le fait de la première torsion, ce que Wiedemann appelle *torsion permanente* diminuera.

Au lieu d'assimiler l'effet d'ébranlement à une variation rapide et ondulatoire de la vitesse, nous pourrions tout aussi bien l'assimiler à une variation rapide et ondulatoire de la tension, de la température, etc. Il est nécessaire de reprendre systématiquement l'étude de ces prétendus effets d'ébranlement.

Il nous reste à dire quelques mots du phénomène appelé *fatigue d'élasticité* par Lord Kelvin et dont voici la définition précise. On impose à un fil un parcours sinusoïdal d'amplitude constante. Dans une première expérience, la torsion est entretenue pendant plusieurs heures ou plusieurs jours; on mesure l'aire S_1 du cycle. Puis le fil est abandonné à lui-même pendant plusieurs jours, on lui impose alors le même cycle et, après l'avoir répété un certain nombre de fois pour le fermer, on mesure son aire S_2.

D'après Lord Kelvin $S_1 > S_2$.

On peut définir le phénomène un peu différemment. Imposons un cycle déterminé à un fil neuf : il se ferme pratiquement après quelques parcours,

dix par exemple. Son aire S_2 reste invariable pendant un certain temps. D'après Lord Kelvin le fil se fatigue; peu à peu S_2 augmente. Il se produirait donc un phénomène inverse du phénomène d'accommodation. Le repos restituerait au fil ses qualités premières. Avant de discuter les faits, il faudrait être sûr de leur existence; or, dans la plupart des cas, M. Tomlinson la considère comme douteuse.

Dans toutes ces expériences qui durent des heures et des jours, il faudrait éliminer, comme le conseillait M. Brillouin (*Journal de Physique*, t. VII, 2ᵉ série), les oscillations de température; maintenir celle-ci constante par une étuve analogue à celle que M. Gouy vient de proposer tout récemment.

LES

GROUPES BILINÉAIRES

ET LES

SYSTÈMES DE NOMBRES COMPLEXES,

PAR M. E. CARTAN.

Maître de Conférences à l'Université de Lyon.

INTRODUCTION.

On sait quel lien étroit relie la théorie des systèmes de nombres complexes et celle des groupes linéaires et homogènes simplement transitifs. L'étude des groupes *bilinéaires*, c'est-à-dire des groupes dont les équations finies sont linéaires et homogènes par rapport aux variables et par rapport aux paramètres établit aussi une relation entre ces groupes et les systèmes de nombres complexes, et cette relation est bien simple : on peut regarder toute transformation finie proprement dite ou dégénérée d'un tel groupe comme un nombre complexe d'un certain système pour lequel la multiplication satisfait aux lois de distributivité et d'associativité et pour lequel l'opération inverse de la multiplication est en général possible.

Le but de ce Mémoire, après avoir établi cette relation et étudié quelques propriétés générales des groupes bilinéaires et même des groupes linéaires simplement par rapport aux paramètres, est de faire une étude d'ensemble sur les systèmes de nombres complexes, spécialement au point de vue de leur composition et d'en faire l'application aux groupes bilinéaires. Cette étude, qui occupe les paragraphes IV-VIII de ce Mémoire, forme un tout en soi ; elle ne fait appel à aucune notion de la théorie des groupes et reste exclusivement sur le terrain de la théorie des nombres complexes. Elle a pour point de départ la considération de ce que j'appelle *l'équation caractéris-*

tique d'un système de nombres complexes, bien que ce nom ait été donné par les auteurs précédents à une équation d'une tout autre nature; cette notion d'équation caractéristique, qui a déjà conduit à tant de résultats, spécialement dans la théorie de la structure des groupes, est aussi très féconde ici; elle m'a permis de trouver des théorèmes d'une extrême importance, que j'ai exposés récemment dans deux Notes parues aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (31 mai et 8 juin 1897). C'est ainsi qu'en étendant les notions de systèmes *simples, semi-simples, intégrables,* etc., empruntées à la théorie de la structure des groupes, j'ai été conduit naturellement à une classification (déjà ancienne) des systèmes en deux grandes classes : les systèmes *intégrables* ou *sans quaternions* et les systèmes *non intégrables* ou *à quaternions;* que j'ai pu déterminer tous les systèmes *simples* ou *semi-simples* qui rentrent dans la seconde classe, et qu'enfin, résultat qui n'a pas son analogue dans la théorie de la structure des groupes et dont l'importance ne saurait échapper, que j'ai trouvé un moyen simple de *déduire tous les systèmes de la deuxième classe de ceux de la première.*

Le paragraphe VII, consacré aux systèmes *réels* de nombres complexes, conduit à des résultats tout à fait analogues, quoique un peu plus compliqués et par cela même plus intéressants.

Enfin les paragraphes VIII et IX contiennent les applications des théories précédentes aux groupes bilinéaires, d'abord aux groupes simplement transitifs et ensuite aux groupes quelconques.

I.

CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR QUE r TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES INDÉPENDANTES ENGENDRENT UN GROUPE LINÉAIRE ET HOMOGÈNE PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES.

1. Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x'_1 = a_1\xi_{11} + a_2\xi_{12} + \ldots + a_r\xi_{1r}, \\ x'_2 = a_1\xi_{21} + a_2\xi_{22} + \ldots + a_r\xi_{2r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_n = a_1\xi_{n1} + a_2\xi_{n2} + \ldots + a_r\xi_{nr} \end{cases}$$

les équations finies d'un groupe à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et r paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$; les ξ_{ik} sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si ce groupe

contient la transformation identique, il contiendra manifestement toutes les transformations

$$x'_i = a x_i,$$

et il pourra être regardé comme engendré par r transformations infinitésimales indépendantes. On peut évidemment prendre, pour ces r transformations, les suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 f = \xi_{11}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{21}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{n1}\dfrac{\partial f}{\partial x_n}, \\ X_2 f = \xi_{12}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{22}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{n2}\dfrac{\partial f}{\partial x_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_r f = \xi_{1r}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{2r}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{nr}\dfrac{\partial f}{\partial x_n}, \end{array}\right.$$

et la transformation infinitésimale

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

est nécessairement une combinaison des transformations (2).

2. Si les transformations (1) forment un groupe, la succession de deux quelconques de ces transformations équivaudra à une transformation déterminée du groupe. Effectuons d'abord la transformation infiniment petite

$$(3)\qquad x'_1 = x_1 + \xi_{1i}\,\delta t, \qquad x'_2 = x_2 + \xi_{2i}\,\delta t, \qquad \ldots, \qquad x'_n = x_n + \xi_{ni}\,\delta t,$$

puis la transformation finie

$$(4)\qquad x'_1 = \xi_{1k}, \qquad x'_2 = \xi_{2k}, \qquad \ldots, \qquad x'_n = \xi_{nk},$$

où i et k désignent deux quelconques, différents ou non, des nombres 1, 2, ..., r. Le résultat de ces deux transformations successives est la transformation

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} x'_1 = \xi_{1k} + X_i\xi_{1k}\,\delta t + \ldots, \\ x'_2 = \xi_{2k} + X_i\xi_{2k}\,\delta t + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_n = \xi_{nk} + X_i\xi_{nk}\,\delta t + \ldots, \end{array}\right.$$

qui doit rentrer dans la formule (1). Il en résulte que l'on a des relations

telles que

$$(6)\qquad \begin{cases} X_i\xi_{1k} = \alpha_{ik1}\xi_{11} + \alpha_{ik2}\xi_{12} + \ldots + \alpha_{ikr}\xi_{1r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_i\xi_{nk} = \alpha_{ik1}\xi_{n1} + \alpha_{ik2}\xi_{n2} + \ldots + \alpha_{ikr}\xi_{nr}, \end{cases}$$

ou encore

$$(7)\qquad X_i(X_kf) = \alpha_{ik1}X_1f + \alpha_{ik2}X_2f + \ldots + \alpha_{ikr}X_rf \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

en posant

$$X_i(X_kf) = X_i(X_kx_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_i(X_kx_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_i(X_kx_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Les relations (7) sont celles auxquelles nous voulions arriver. *Elles donnent des conditions nécessaires pour que les r transformations infinitésimales* $X_1f, \ldots, X_rf$ *engendrent un groupe linéaire et homogène par rapport aux paramètres.*

3. Ces conditions sont *suffisantes*. En effet, supposons que les r transformations infinitésimales indépendantes (2), *dont la transformation* $x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$ *est supposée être une combinaison linéaire*, satisfassent aux r^2 relations (7) où les α sont des constantes. Ces transformations engendreront d'abord nécessairement un groupe, car de (7) on déduit

$$(8)\qquad (X_iX_k) = X_i(X_kf) - X_k(X_if) = (\alpha_{ik1} - \alpha_{ki1})X_1f + \ldots + (\alpha_{ikr} - \alpha_{kir})X_rf,$$

relations caractéristiques de la propriété des transformations (2) d'engendrer un groupe.

Je dis alors que les équations finies de ce groupe peuvent être mises sous la forme (1). D'abord les équations (1) définissent des *transformations* proprement dites, car le déterminant fonctionnel des seconds membres par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est en général différent de zéro, puisque, pour des valeurs particulières des paramètres a_i, ces seconds membres se réduisent à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En second lieu, les transformations (1) contiennent la transformation identique pour la même raison. Enfin ces transformations contiennent toutes les transformations finies engendrées par les transformations infinitésimales (2); le groupe à un paramètre engendré par X_1f peut en effet être défini au moyen des formules

$$x'_i = x_i + \frac{e}{1}X_1x_i + \frac{e^2}{1.2}X_1(X_1x_i) + \frac{e^3}{1.2.3}X_1[X_1(X_1x_i)] + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

mais d'après les formules (7), les coefficients de e^2, e^3, ... s'expriment en fonctions linéaires et homogènes, les mêmes pour tous les indices i, de $X_1 x_i$, $X_2 x_i$, ..., $X_r x_i$, c'est-à-dire de ξ_{i1}, ξ_{i2}, ..., ξ_{ir}. Le groupe engendré par $X_1 f$ a donc ses équations finies de la forme

$$x'_i = x_i + \alpha_1 \xi_{i1} + \alpha_2 \xi_{i2} + \ldots + \alpha_r \xi_{ir} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire est contenu parmi les transformations (1).

Les formules (1) définissent donc un ensemble de transformations à r paramètres qui contiennent toutes les transformations du groupe engendré par les r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, \ldots, X_r f$. Elles constituent donc les équations finies de ce groupe qui, par suite, est linéaire et homogène par rapport aux paramètres.

4. En définitive, nous avons le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$, à n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$, engendrent un groupe linéaire et homogène par rapport aux paramètres est que la transformation $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ soit une combinaison linéaire des $X_i f$, ainsi que les r^2 transformations infinitésimales $X_i(X_k f)$. On a alors la valeur de la variable transformée x'_i dans les équations finies du groupe, en prenant le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans l'expression $a_1 X_1 f + a_2 X_2 f + \ldots + a_r X_r f$.

Par exemple, les transformations infinitésimales

$$(9) \qquad \begin{cases} X_1 f = x \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 f = \qquad x^m \dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 f = \qquad x^m \log x \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

satisfont aux neuf relations

$$\begin{array}{lll} X_1(X_1 f) = X_1 f, & X_1(X_2 f) = m X_2 f, & X_1(X_3 f) = X_2 f + m X_3 f, \\ X_2(X_1 f) = X_2 f, & X_2(X_2 f) = 0, & X_2(X_3 f) = 0, \\ X_3(X_1 f) = X_3 f, & X_3(X_2 f) = 0, & X_3(X_3 f) = 0. \end{array}$$

Elles engendrent donc un groupe linéaire et homogène par rapport aux paramètres dont les équations finies sont

$$(10) \qquad \begin{cases} x' = ax, \\ y' = ay + bx^m + cx^m \log x. \end{cases}$$

Comme application, on peut chercher le plus petit groupe linéaire et homogène par rapport aux paramètres, dans lequel soient contenues r transformations infinitésimales données $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$. Pour l'obtenir, il suffira d'ajouter à ces transformations la transformation $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$, si elle n'y est pas, ainsi que toutes les transformations $X_i(X_k f)$; procéder de la même manière pour les transformations nouvelles ainsi obtenues, et ainsi de suite. Si ces opérations ont un terme, les transformations données sont contenues dans un groupe fini linéaire et homogène par rapport aux paramètres; sinon elles ne sont contenues que dans un groupe infini (non nécessairement défini par des équations aux dérivées partielles) jouissant de la même propriété.

II.

LES GROUPES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES PAR RAPPORT AUX VARIABLES ET PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES. GROUPE DES PARAMÈTRES.

5. Nous allons plus particulièrement considérer maintenant les groupes *linéaires et homogènes*, c'est-à-dire pour lesquels les variables transformées sont des fonctions linéaires et homogènes des variables primitives. Ce sont ceux de ces groupes qui sont en même temps linéaires et homogènes par rapport aux paramètres qui vont nous occuper. Nous les désignerons dorénavant sous le nom de *groupes bilinéaires*.

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'on obtenait l'expression de la variable transformée x'_i par l'effet de la transformation de paramètres a_1, a_2, ..., a_r en prenant le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans l'expression

$$a_1 X_1 f + \ldots + a_r X_r f.$$

Cela nous conduit à regarder le symbole

$$a_1 X_1 f + \ldots + a_r X_r f$$

aussi bien comme représentant une transformation finie S_a qu'une transfor-

mation infinitésimale. Bien entendu, nous n'aurons affaire à une véritable transformation que si les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont des fonctions indépendantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Néanmoins il y aura avantage à considérer les symboles pour lesquels cette condition n'est pas remplie et à les regarder comme représentant encore des transformations finies *dégénérées*, ce fait d'ailleurs ne se présentera que pour des valeurs particulières des a.

6. Imaginons que nous effectuions successivement les deux transformations finies

$$S_a \ldots\ldots \quad a_1 X_1 f + \ldots + a_r X_r f,$$

et

$$S_b \ldots\ldots \quad b_1 X_1 f + \ldots + b_r X_r f.$$

Si nous posons

$$X_i f = \sum_k \xi'_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{k,s} \lambda_{kis} x_s \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

la première de ces transformations est définie par les formules

$$x'_i = \sum_k a_k \xi_{ik} = \sum_{k,s} a_k \lambda_{iks} x_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

et la seconde par les formules

$$x''_i = \sum_k b_k \xi'_{ik} = \sum_{k,s} b_k \lambda_{iks} x'_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Le résultat de ces deux transformations est la transformation

$$x''_i = \sum_{k,h,s,t} b_k \lambda_{iks} a_h \lambda_{sht} x_t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Mais d'après les identités (7) du paragraphe précédent, on a

$$X_h(X_k f) = \sum_{s,t,i} \lambda_{sht} \lambda_{iks} x_t \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{\rho,i,t} \alpha_{hk\rho} \lambda_{i\rho t} x_t \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

c'est-à-dire

$$\sum_s \lambda_{iks} \lambda_{sht} = \sum_\rho \alpha_{hk\rho} \lambda_{i\rho t} \qquad \begin{pmatrix} i, t = 1, 2, \ldots, n \\ h, k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Par suite, les formules (4) deviennent

$$x''_i = \sum_{h,k,\rho,t} \alpha_{hk\rho} a_h b_k \lambda_{i\rho t} x_t = \sum_{\rho,t} c_\rho \lambda_{i\rho t} x_t,$$

en posant

(6) $$c_\rho = \sum \alpha_{hk\rho} a_h b_k.$$

La succession de la transformation S_a et de la transformation S_b équivaut donc à la transformation S_c dont les paramètres $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sont donnés par les équations (6).

7. Si nous appelons Af, Bf, Cf les symboles des transformations S_a, S_b, S_c, les formules (6) nous montrent immédiatement qu'on a la relation *fondamentale*

(7) $$Cf = A(Bf).$$

Par conséquent, *la succession des deux transformations finies* Af *et* Bf *équivaut à la transformation finie* $A(Bf)$.

Cela nous conduit en particulier à la conclusion suivante :

Considérons trois transformations finies quelconques S_a, S_b, S_c. On voit qu'on a l'identité

$$S_a(S_b S_c) = (S_a S_b) S_c.$$

Prenons pour S_a, S_b, S_c respectivement $X_i f$, $X_j f$, $X_k f$. Les relations (7) du paragraphe I conduisent aux identités suivantes entre les quantités α_{iks} [1]

(8) $$\sum_s \alpha_{ist} \alpha_{jks} = \sum_s \alpha_{ijs} \alpha_{skt} \qquad (i, j, k, t = 1, 2, \ldots, r).$$

8. Les équations (6), où l'on regarde les b comme des paramètres, les a comme des variables et les c comme les variables a transformées, définissent, comme on sait, un groupe qui est le *groupe des paramètres* du groupe primitif. Il est linéaire et homogène par rapport aux variables et aux paramètres, contient manifestement la transformation identique et est *simplement transitif :* il faut entendre par là que, étant donnés deux systèmes arbitraires de valeurs des a et des c, il existe un système de valeurs des paramètres b et un seul qui permet de passer des a aux c; autrement dit, le

---

[1] Ces relations peuvent aussi s'établir en démontrant directement que

$$X_i[X_j(X_k f)] = X_i[X_j(X_k f)],$$

identité vraie si les Xf sont *linéaires* par rapport aux variables x.

déterminant des coefficients des b dans les seconds membres des équations (6) n'est pas identiquement nul. Cela résulte de la théorie générale des groupes; mais on peut le démontrer ici directement. En effet, si le déterminant des coefficients des b était identiquement nul, à chaque système de valeurs des a on pourrait faire correspondre un système de valeurs *non toutes nulles* des b tel que les c donnés par les formules (6) soient tous nuls. Mais, par la transformation S_a les x sont transformés en général en n formes linéaires x' *indépendantes,* et la transformation S_b, effectuée sur ces quantités x', ne pourrait donner de résultats tous nuls que si tous les b étaient nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il est facile de vérifier aussi directement que les équations (6) définissent un groupe. Considérons, en effet, les r quantités

$$B_k f = \sum_{h,\rho} \alpha_{hk\rho} a_h \frac{\partial f}{\partial a_\rho} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r);$$

on a

$$B_\mu(B_\nu f) = \sum_{h,\rho,s} \alpha_{h\mu\rho} \alpha_{\rho\nu s} a_h \frac{\partial f}{\partial a_s};$$

mais, d'après les relations (8), cette équation se réduit à

$$B_\mu(B_\nu f) = \sum \alpha_{h\rho s} \alpha_{\mu\nu\rho} a_h \frac{\partial f}{\partial a_s} = \sum_\rho \alpha_{\mu\nu\rho} B_\rho f. \tag{9}$$

Ces relations (9) montrent, d'après les résultats du paragraphe I, que les transformations infinitésimales Bf engendrent un groupe bilinéaire et que les équations finies de ce groupe ne sont autres que les équations (6).

Les formules (9) montrent de plus qu'il y a *isomorphisme* entre les transformations finies du groupe des paramètres et celles du groupe primitif, les quantités α étant les mêmes pour ces deux groupes. Cela veut dire que, si l'on établit une correspondance entre les transformations S_a et T_a du groupe primitif et du groupe des paramètres qui correspondent aux mêmes valeurs des paramètres, à la transformation $S_a S_b$ correspond la transformation $T_a T_b$. En particulier, le groupe des paramètres est son propre groupe des paramètres.

9. Nous avons vu que les r^3 quantités α_{iks} devaient satisfaire aux r^4 équations (8). Nous pouvons maintenant démontrer la réciproque.

Étant donné un système de r^3 quantités α_{iks} satisfaisant aux r^4 équations (8)

$$(8) \qquad \sum_s \alpha_{ist}\alpha_{jks} = \sum_s \alpha_{ijs}\alpha_{skt} \qquad (i, j, k, t = 1, 2, \ldots, r),$$

telles de plus que les r transformations infinitésimales

$$(10) \qquad B_k f = \sum_{h,\rho} \alpha_{hk\rho} a_h \frac{\partial f}{\partial a_\rho}$$

soient indépendantes et que le symbole $a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + \ldots + a_r \frac{\partial f}{\partial a_r}$ *soit une combinaison linéaire des* $B_k f$, *il existe certainement un système de r transformations infinitésimales indépendantes et linéaires* $X_1 f, \ldots, X_r f$ *telles que l'on ait*

$$X_i(X_k f) = \sum_s \alpha_{iks} X_s f,$$

ces transformations engendrant un groupe bilinéaire.

Il suffit, en effet, de prendre

$$X_k f = \sum \alpha_{hk\rho} x_h \frac{\partial f}{\partial x_\rho};$$

en refaisant les calculs du numéro précédent qui s'appuient uniquement sur les équations (8), on tombe sur les identités à démontrer. Il en résulte même que ce groupe est son propre groupe des paramètres et, par suite, simplement transitif.

10. Étant donné un groupe bilinéaire défini par r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$, nous avons défini la transformation finie de paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ et ayant pour symbole

$$(11) \qquad a_1 X_1 f + \ldots + a_r X_r f.$$

Imaginons que nous remplacions les Xf par r combinaisons linéaires indépendantes de ces mêmes quantités $X'_1 f, X'_2 f, \ldots, X'_r f$. Alors la transformation finie (11) est représentée par un nouveau symbole

$$(12) \qquad a'_1 X'_1 f + \ldots + a'_r X'_r f,$$

où les a' sont certaines combinaisons linéaires des a. Si nous prenons alors

les a' pour nouveaux paramètres, nous obtenons manifestement un *nouveau groupe des paramètres,* mais qui se déduit du premier en effectuant sur les variables et sur les paramètres une même substitution linéaire, celle qui permet de passer des a aux a'. Ces deux groupes sont dits *semblables* et ne doivent pas être regardés comme distincts.

On peut donc dire qu'un groupe donné a une infinité de groupes des paramètres, mais ils se déduisent tous de l'un d'entre eux par le procédé indiqué plus haut.

11. Cela étant, considérons un groupe bilinéaire et *simplement transitif.* Je dis qu'*on peut toujours, par un changement de paramètres, faire en sorte que ce groupe soit son propre groupe des paramètres.*

Soient, en effet, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les variables, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les paramètres. Le déterminant des coefficients des a dans les seconds membres des équations finies du groupe est, par hypothèse, non identiquement nul. Supposons donc que, pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$, ce déterminant soit différent de zéro. Nous pouvons toujours faire un changement de paramètres de façon que la transformation S_a de paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ transporte le point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ au point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; autrement dit nous pouvons définir sans ambiguïté chaque transformation du groupe par le point A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que cette transformation fait correspondre au point *origine* $O(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Cela étant, considérons deux transformations quelconques S_a, S_b définies par deux points $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. La transformation $S_a S_b$ fera alors correspondre au point O d'abord le point A, puis le point transformé du point A par la transformation S_b. Si donc S_c est cette transformation, correspondant au point C, le point C est le transformé du point A par S_b. Mais il y a une autre transformation qui fait passer du point A au point C : c'est précisément la transformation T_b du groupe des paramètres. Donc les deux transformations S_b et T_b font correspondre au même point A le même point C : elles sont identiques. *Le groupe considéré est donc identique à son groupe des paramètres.*

Analytiquement, *on peut choisir les transformations infinitésimales* $X_1 f, \ldots, X_n f$ *d'un groupe simplement transitif de telle façon que, si*

$$X_i(X_k f) = \sum_s \alpha_{iks} X_s f,$$

on ait en même temps

$$X_i f = \alpha_{kis} x_k \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Ce théorème est dû à M. Study qui a démontré, d'une façon plus générale, que tout groupe simplement transitif, linéaire et homogène par rapport aux variables seulement, pouvait toujours être supposé linéaire et homogène par rapport aux paramètres et identique à son groupe des paramètres.

III.

RELATIONS ENTRE LES GROUPES BILINÉAIRES ET LES SYSTÈMES DE NOMBRES COMPLEXES.

12. Nous avons, dans le paragraphe précédent, fait correspondre à toute transformation finie S_a d'un groupe bilinéaire le symbole

$$a_1 X_1 f + \ldots + a_r X_r f.$$

Nous allons maintenant introduire une autre représentation. Nous pouvons regarder l'ensemble des r paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ comme constituant un nombre complexe d'espèce supérieure, que nous désignerons encore symboliquement par

$$(1) \qquad a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_r e_r;$$

les e sont dits *unités*. Nous dirons qu'un nombre complexe est nul si les r nombres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ qui le définissent sont tous nuls. Nous définirons la somme des deux nombres complexes

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_r e_r,$$
$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_r e_r$$

par le symbole

$$(2) \qquad a + b = (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + \ldots + (a_r + b_r)e_r.$$

Nous définirons enfin le *produit* des deux nombres complexes a et b, symboles des deux transformations finies S_a et S_b par le nombre complexe c symbole de la transformation résultante S_c. Nous aurons donc, par définition, en conservant les notations des paragraphes précédents,

$$(3) \qquad c = ab = \sum_{h,k,\rho} \alpha_{hk\rho} a_h b_k e_\rho = \sum_\rho c_\rho e_\rho.$$

De l'origine même de cette définition résultent les propriétés suivantes du produit :

Il y a en général un seul nombre b qui, multiplié A GAUCHE *par un nombre a, reproduise un nombre donné c; il y a en général un seul nombre a qui, multiplié* A DROITE *par un nombre donné b, reproduise un nombre donné c.*

La multiplication satisfait aux lois distributive et associative; c'est-à-dire on a les identités

$$(4)\qquad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd;$$

$$(5)\qquad (ab)c = a(bc).$$

L'identité (4) est évidente; l'identité (5) résulte de la représentation des nombres complexes comme substitutions.

Enfin, *il y a un nombre complexe* ε *qui, multiplié à droite ou à gauche par un nombre complexe quelconque, reproduise ce nombre;* c'est celui qui représente la transformation *identique* du groupe donné. On l'appelle le *module* du système de nombres complexes.

13. Réciproquement, définissons un système de nombres complexes à r unités fondamentales $e_1, e_2, \ldots, e_r$ par les lois suivantes :

L'addition de deux nombres complexes est définie par la formule (2).

Le produit de deux nombres complexes a et b est un nombre

$$ab = c = \sum c_\rho e_\rho,$$

où l'on a

$$(6)\qquad c_\rho = \sum_{h,k} \alpha_{hk\rho} a_h b_\rho,$$

les constantes α_{iks} étant telles que le déterminant des coefficients des b dans les seconds membres des formules (6) n'est pas identiquement nul, de même que le déterminant des coefficients des a dans les mêmes expressions; ces constantes étant, de plus, tellement choisies que la multiplication satisfasse à la loi associative exprimée par la formule (5)

$$(4)\qquad (ab)c = a(bc).$$

Je dis alors que *ce système complexe peut être regardé comme associé*

de la façon qui a été définie au numéro précédent, à un certain groupe bilinéaire d'ordre r.

En effet, d'abord la formule (5) ne fait qu'exprimer les relations déjà considérées entre les constantes α_{iks}

$$\sum_{\rho} \alpha_{ist}\alpha_{jks} = \sum_{s} \alpha_{ijs}\alpha_{skt} \qquad (i, j, k, t = 1, 2, \ldots, r). \tag{7}$$

De plus, les r transformations infinitésimales

$$X_i f = \sum \alpha_{kis} x_k \frac{\partial f}{\partial x_s} \tag{8}$$

sont indépendantes puisque le déterminant des $\frac{\partial f}{\partial x_s}$ est, par hypothèse, différent de zéro. Enfin je dis que le système admet un *module*.

Soit, en effet,

$$b^0 = b_1^0 e_1 + \ldots + b_r^0 e_r$$

un nombre complexe tel que les équations (6) puissent être résolues par rapport aux a. Soit ε le nombre a ainsi obtenu lorsqu'on donne à c la valeur b^0. On a alors

$$\varepsilon b^0 = b^0.$$

Si maintenant a est un nombre complexe quelconque, on a

$$a(\varepsilon b^0) = (a\varepsilon) b^0 = ab^0;$$

de sorte que le produit de b^0 par les deux nombres a et $a\varepsilon$ est le même; d'après l'hypothèse faite sur b^0, il en résulte

$$a\varepsilon = a. \tag{9}$$

Si donc

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \ldots + \varepsilon_r e_r,$$

l'identité (9) montre que le symbole $\varepsilon_1 X_1 f + \ldots + \varepsilon_r X_r f$ se réduit à $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_r \frac{\partial f}{\partial x_r}$.

Les r transformations (8) sont donc indépendantes; elles contiennent la transformation $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_r \frac{\partial f}{\partial x_r}$; et, enfin, elles satisfont aux relations

$$X_i(X_k f) = \sum \alpha_{iks} X_s f;$$

elles engendrent donc un groupe bilinéaire, et le système de nombres complexes qui est associé à ce groupe est précisément le système considéré.

14. En somme, nous avons fait correspondre ainsi, d'une manière univoque, les groupes des paramètres des groupes bilinéaires aux systèmes de nombres complexes satisfaisant aux conditions exprimées dans le numéro précédent. Comme, d'après le théorème du n° 10, tout groupe bilinéaire simplement transitif peut être regardé comme son propre groupe des paramètres, nous avons établi une correspondance univoque entre les groupes bilinéaires simplement transitifs et les systèmes de nombres complexes. Ce dernier résultat est connu depuis longtemps et démontré en particulier complètement par M. Study; mais nos considérations sont plus générales, puisqu'elles établissent une correspondance entre un groupe bilinéaire *quelconque* et un système de nombres complexes.

L'étude des relations (7), c'est-à-dire, en somme, l'étude des nombres complexes nous fournira, comme nous le verrons dans la suite, des résultats très généraux sur les groupes bilinéaires *quelconques*. De nombreux auteurs se sont occupés de cette théorie des nombres complexes; je vais la prendre à un point de vue qui nous donnera des résultats nouveaux pour la plupart et d'une grande généralité.

IV.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DE NOMBRES COMPLEXES. SYSTÈMES DE LA PREMIÈRE CLASSE.

15. Considérons un système de nombres complexes

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_r e_r, \tag{1}$$

où les e sont des symboles, les x des nombres ordinaires, réels ou imaginaires. Nous supposons définies sur ces nombres les opérations fondamentales, addition et multiplication,

$$\left\{\begin{aligned} x + y &= (x_1 e_1 + \ldots + x_r e_r) + (y_1 e_1 + \ldots + y_r e_r) \\ &= (x_1 + y_1) e_1 + \ldots + (x_r + y_r) e_r, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} xy &= (x_1 e_1 + \ldots + x_r e_r)(y_1 e_1 + \ldots + y_r e_r) \\ &= \sum \alpha_{ik1} x_i y_k e_1 + \sum \alpha_{ikr} x_i y_k e_r, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

de telle façon que la multiplication satisfasse à la loi associative

$$(xy)z = x(yz), \tag{4}$$

et de telle façon aussi que les deux opérations inverses de la multiplication ou division, la première consistant à passer du premier facteur et du produit au deuxième facteur, la seconde consistant à passer du second facteur et du produit au premier facteur, soient possibles en général.

Alors il existe un nombre ε appelé *module*, tel que pour tout nombre x du système on ait

$$\varepsilon x = x\varepsilon = \varepsilon. \tag{5}$$

Si l'on suppose l'existence d'un *module*, il est inutile de supposer la possibilité des deux divisions; car, si la première, par exemple, n'était pas possible, à chaque nombre x correspondrait au moins un nombre y tel que xy fût nul; or cela ne peut pas avoir lieu pour $y = \varepsilon$.

Il est bien évident que si l'on prend, au lieu des unités $e_1, e_2, \ldots, e_r$, r nombres quelconques du système non liés par une relation linéaire à coefficients ordinaires, on obtient un nouveau système qui ne doit pas être considéré comme distinct du premier; les x_i subissent simplement une substitution linéaire.

16. Étant donné un nombre x du système

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_r e_r,$$

cherchons à déterminer un nombre y

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_r e_r,$$

tel que l'on ait

$$xy = \omega y, \tag{6}$$

où ω désigne un nombre ordinaire.

La relation (6) se décompose dans les r suivantes :

$$\sum_{i,k} x_i y_k \alpha_{iks} = \omega y_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

Si l'on veut que le nombre y ne soit pas nul, il faut que ω satisfasse à

l'équation

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \sum x_i\alpha_{i11}-\omega & \sum x_i\alpha_{i21} & \dots & \sum x_i\alpha_{ir1} \\ \sum x_i\alpha_{i12} & \sum x_i\alpha_{i22}-\omega & \dots & \sum x_i\alpha_{ir2} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \sum x_i\alpha_{i1r} & \sum x_i\alpha_{i2r} & \dots & \sum x_i\alpha_{irr}-\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut s'appeler l'*équation caractéristique* du système, quoique ce nom ait été donné par certains auteurs à des équations d'une tout autre nature. Nous lui conserverons néanmoins ce nom, toute confusion étant impossible.

Remarquons immédiatement que le terme indépendant de ω dans le premier membre de l'équation caractéristique est, d'après les hypothèses faites, *différent de zéro*.

On pourrait considérer une *deuxième* équation caractéristique obtenue en partant de l'équation

$$yx = \omega y.$$

La considération de cette deuxième équation nous sera utile dans certains cas.

17. Supposons que l'équation caractéristique admette en général h racines distinctes et h seulement, et considérons un nombre $x = a$ pour lequel cette condition est réalisée. Soient $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$ ces racines. Alors il existe un nombre α_1 tel que l'on ait

$$a\alpha_1 = \omega_1\alpha_1;$$

puis, si la racine ω_1 est multiple, un nombre α'_1 tel que l'on ait

$$a\alpha'_1 = \omega_1\alpha'_1 + \lambda_{11}\alpha_1;$$

puis un nombre α''_1 tel que l'on ait

$$a\alpha''_1 = \omega_1\alpha''_1 + \lambda_{21}\alpha_1 + \lambda_{22}\alpha'_1,$$

et ainsi de suite. Finalement, on fait correspondre à la racine ω_1, de multiplicité m_1, un système de m_1 nombres linéairement indépendants $a_1, a'_1, \dots,$

$a_1^{(m-1)}$ tels que le produit de a par chacun d'eux $a_1^{(i)}$ soit égal au produit de ce dernier par ω plus une combinaison linéaire des précédents.

On peut procéder de la même façon pour les racines $\omega_2, \ldots, \omega_h$, de sorte que nous avons déterminé r nouveaux nombres complexes linéairement indépendants, dont chacun *appartient* à une des racines $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$, ceux de ces nombres qui appartiennent à la racine ω_i étant désignés par les symboles $\alpha_i, \alpha'_i, \alpha''_i, \ldots, \alpha_i^{(m_i-1)}$.

18. Il résulte facilement de là que si, par exemple, le produit ax est égal à ωx plus une combinaison linéaire de $\alpha_1, \alpha'_1, \ldots$, le nombre x est lui-même une combinaison linéaire de $\alpha_1, \alpha'_1, \ldots$. Cela étant, il est facile d'en déduire successivement que $\alpha_1 x, \alpha'_1 x, \alpha''_1 x, \ldots$ sont des combinaisons linéaires de $\alpha_1, \alpha'_1, \ldots$, et cela quel que soit x.

Donc le produit d'un nombre appartenant à la racine ω_1 *avec un nombre quelconque du système appartient encore à la racine* ω_1. Il en est de même pour les autres racines.

19. Cela étant, considérons le module ε du système. Il peut toujours se mettre sous la forme

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_h,$$

un ou plusieurs des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ pouvant être nuls; ε_1 appartenant à la racine $\omega_1, \ldots, \varepsilon_h$ à la racine ω_h.

Or prenons $\varepsilon\alpha_1^{(i)}$. On a

$$\varepsilon\alpha_1^{(i)} = \varepsilon_1\alpha_1^{(i)} + \varepsilon_2\alpha_1^{(i)} + \ldots + \varepsilon_h\alpha_1^{(i)};$$

mais, d'après le numéro précédent, $\varepsilon_2\alpha_1^{(i)}$ appartient à la racine $\omega_2, \ldots, \varepsilon_h\alpha_1^{(i)}$ à la racine ω_h. Comme le second membre doit être égal à $\alpha_1^{(i)}$, il en résulte qu'on a

$$(8) \qquad \varepsilon_1\alpha_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)}, \qquad \varepsilon_2\alpha_1^{(i)} = 0, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_h\alpha_1^{(i)} = 0;$$

de même

$$(9) \qquad \varepsilon_1\alpha_2^{(i)} = 0, \qquad \varepsilon_2\alpha_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)}, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_h\alpha_2^{(i)} = 0,$$

et ainsi de suite.

Les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ peuvent être appelés *modules partiels*.

Considérons maintenant les nombres α_1, α'_1, ... On peut toujours supposer que les produits

$$\alpha_1\varepsilon_1, \quad \alpha'_1\varepsilon_1, \quad \ldots, \quad \alpha_1^{(p-1)}\varepsilon_1$$

sont distincts et différents de zéro, les produits restants

$$\alpha_1^{(p)}\varepsilon_1, \quad \alpha_1^{(p+1)}\varepsilon_1, \quad \ldots, \quad \alpha_1^{(m_1-1)}\varepsilon_1$$

étant tous nuls. Le nombre $\alpha_1\varepsilon_1$, par exemple, fait partie des α_1, α'_1, ..., et l'on a, d'autre part,

$$(\alpha_1\varepsilon_1)\varepsilon_1 = \alpha_1(\varepsilon_1\varepsilon_1) = \alpha_1\varepsilon_1.$$

Le produit de $\alpha_1\varepsilon_1$ par ε_1 n'étant pas nul, on voit que ce produit est une combinaison linéaire de α_1, α'_1, ..., $\alpha_1^{(p-1)}$, et ce nombre est égal à son propre produit par ε_1. Comme on peut répéter ce raisonnement pour $\alpha'_1\varepsilon_1$, ..., $\alpha_1^{(p-1)}\varepsilon_1$, il en résulte qu'on a

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \alpha_1\varepsilon_1 = \alpha_1, & \alpha'_1\varepsilon_1 = \alpha'_1, & \ldots, & \alpha_1^{(p-1)}\varepsilon_1 = \alpha_1^{(p-1)}, \\ \alpha_1^{(p)}\varepsilon_1 = 0, & \ldots, & \alpha_1^{(m_1-1)}\varepsilon_1 = 0. & \end{array}\right.$$

De même, $\varepsilon_1\varepsilon_2$ étant nul d'après les formules (8) et (9), on a

$$\alpha_1\varepsilon_2 = (\alpha_1\varepsilon_1)\varepsilon_2 = \alpha_1(\varepsilon_1\varepsilon_2) = 0, \quad \alpha'_1\varepsilon_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_1^{(p-1)}\varepsilon_2 = 0,$$

et si l'on considère les nombres $\alpha_1^{(p)}$, ..., $\alpha_1^{(m_1-1)}$, on peut les supposer choisis de telle façon que les q premiers se reproduisent lorsqu'on les multiplie par ε_2, les autres donnant un produit nul avec ce même nombre. On peut continuer ainsi de proche en proche.

Finalement, on voit qu'*on peut choisir avec* ε_1, ε_2, ..., ε_h, *rh nombres linéairement indépendants du système,* η_1, η_2, ..., η_{rh}, *tels que pour chacun d'eux* η, *il existe deux indices* α *et* β *inférieurs ou égaux à* h *de façon qu'on ait*

$$(11)\qquad \varepsilon_\alpha\eta = \eta\varepsilon_\beta = \eta,$$

tous les produits $\varepsilon_i\eta$, $\eta\varepsilon_j$ *étant nuls pour* i *différent de* α *et* j *différent de* β.

L'ensemble des deux indices (α, β) constitue ce que M. Scheffers a appelé le *caractère* du nombre η.

On peut ajouter la remarque importante que, toutes les fois qu'on aura h nombres ε_1, ..., ε_h *satisfaisant à* $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$, $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$, *on pourra faire la réduction précédente.*

20. *Le produit d'un nombre complexe de caractère (α, β) par un nombre complexe de caractère (γ, δ) est nul si β est différent de γ et est un nombre complexe de caractère (α, δ) si β est égal à γ.*

En effet, soient η et η' ces deux nombres. On a, par hypothèse,

$$\varepsilon_\alpha \eta = \eta \varepsilon_\beta = \eta, \qquad \varepsilon_\gamma \eta' = \eta' \varepsilon_\delta = \eta'.$$

Il en résulte qu'on a

$$\varepsilon_\alpha \eta\eta' = \eta\eta' = \eta\eta' \varepsilon_\delta, \qquad \eta\eta' = (\eta\varepsilon_\beta)(\varepsilon_\gamma \eta') = \eta(\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma)\eta'.$$

Mais si β est différent de γ, $\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma$ est nul et par suite aussi $\eta\eta'$. Si β est égal à γ, le produit $\eta\eta'$ peut être nul; mais, s'il ne l'est pas, il est certainement de caractère (α, δ).

Les modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ peuvent eux-mêmes être considérés comme ayant respectivement les caractères $(1, 1), (2, 2), \ldots, (h, h)$.

L'existence de ces modules montre que la deuxième équation caractéristique admet au moins h racines distinctes. En effet, considérons le nombre

$$x = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_h\varepsilon_h,$$

on a

$$\varepsilon_1 x = x_1 \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_2 x = x_2\varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_h x = x_h \varepsilon_h,$$

ce qui démontre bien la propriété.

Comme nous aurions pu aussi bien partir de la deuxième équation caractéristique que de la première, nous croyons que *les deux équations caractéristiques admettent, pour des valeurs arbitraires de x, le même nombre de racines distinctes.*

21. L'ensemble des nombres complexes de caractère $(1, 1)$ forme lui-même un système de nombres complexes satisfaisant aux conditions énoncées au début du paragraphe. En effet, le produit de deux nombres de caractère $(1, 1)$ est encore un nombre de caractère $(1, 1)$; ce produit satisfait à la loi associative et enfin ce système partiel admet un module qui n'est autre que ε_1. Si nous désignons par $m_{\alpha\beta}$ le nombre des unités indépendantes de caractère (α, β), nous voyons que ce système des nombres de caractère $(1, 1)$ admet m_{11} unités indépendantes. Désignons ce système par Σ_1.

L'équation caractéristique du système Σ_1 n'admet qu'une seule racine

multiple d'ordre m_{11}. Car si elle en admettait plusieurs distinctes, en répétant sur le système Σ_1 le raisonnement fait sur le système primitif, nous arriverions à trouver dans Σ_1 au moins deux modules partiels ε'_1, ε''_1, et l'équation caractéristique du système primitif, obtenue en partant du nombre

$$a = x'_1\varepsilon'_1 + x''_1\varepsilon''_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_h\varepsilon_h,$$

admettrait, contrairement à l'hypothèse faite, $h+1$ racines distinctes, à savoir x'_1, x''_1, x_2, ..., x_h, et cela en vertu des équations

$$a\varepsilon'_1 = x'_1\varepsilon'_1, \qquad a\varepsilon''_1 = x''_1\varepsilon''_1, \qquad a\varepsilon_2 = x_2\varepsilon_2, \qquad \ldots, \qquad a\varepsilon_h = x_h\varepsilon_h.$$

Il résulte de là que le premier membre de l'équation caractéristique de Σ_1 est la puissance $m_{11}^{\text{ième}}$ d'un facteur linéaire. Par suite, on peut supposer choisies les unités de Σ_1 de telle façon que ε_1 soit une de ces unités et que pour toutes les autres l'équation caractéristique n'admette que des racines nulles.

Si l'on appelle nombre PSEUDO-NUL *d'un système un nombre pour lequel l'équation caractéristique n'a que des racines nulles,* on voit que le système Σ_1 d'ordre m_{11} admet $m_{11}-1$ unités pseudo-nulles et que tous les nombres qui s'en déduisent linéairement sont également pseudo-nuls.

21. *Un nombre* PSEUDO-NUL *du système* Σ_1 *est également* PSEUDO-NUL *pour le système primitif* Σ. Soit, en effet, η un de ces nombres, nécessairement distinct de ε_1. Supposons que l'équation caractéristique du système Σ obtenue en partant du nombre η admette une racine ω différente de zéro. Alors il existe un nombre ζ du système tel que l'on ait

$$\eta\zeta = \omega\zeta.$$

Ce nombre ζ est évidemment une somme de nombres ayant chacun un *caractère* déterminé; comme η est de caractère $(1, 1)$, on voit que ζ ne peut être qu'une somme de nombres de caractères $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, h)$. Supposons qu'il y ait dans cette somme un nombre η' de caractère $(1, \alpha)$. Alors on voit immédiatement que l'on a aussi

$$\eta\eta' = \omega\eta'.$$

Cela étant, l'équation caractéristique obtenue en partant du nombre

$$a = y\eta + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_h\varepsilon_h$$

admet $h+1$ racines distinctes. On a, en effet, d'abord les relations

$$a\eta' = (y + x_1)\eta', \qquad a\varepsilon_2 = x_2\varepsilon_2, \qquad \ldots, \qquad a\varepsilon_h = x_h\varepsilon_h.$$

De plus, le nombre η étant pseudo-nul dans le système Σ_1 il existe au moins un nombre η'' de ce système tel que le produit $\eta\eta''$ soit nul; on a, par suite,

$$a\eta'' = x_1\eta''.$$

L'équation caractéristique admettrait donc les $h+1$ racines distinctes, x_1, x_1+y, x_2, $\ldots$, x_h, ce qui est impossible.

23. *Étant donnés un nombre pseudo-nul* η *d'un système* Σ *de nombres complexes et un autre nombre quelconque* u *du même système, il existe un entier positif* m *tel que le produit* $\eta^m u$ *soit nul.* Posons, en effet,

$$\eta u = u_1, \qquad \eta u_1 = u_2, \qquad \ldots, \qquad \eta u_{m-1} = u_m, \qquad \ldots.$$

Supposons que les nombres u, u_1, u_2, $\ldots$, u_{m-1} soient linéairement indépendants, mais que u_m soit une combinaison linéaire des précédents; ce fait se présentera certainement pour un nombre m qu'on peut même affirmer au plus égal à $r+1$. Supposons donc

$$\eta u_{m-1} = \lambda u + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{m-1} u_{m-1},$$

les λ désignant des nombres ordinaires. Cherchons à déterminer un nombre différent de zéro

$$v = \rho u + \rho_1 u_1 + \ldots + \rho_{m-1} u_{m-1},$$

tel que l'on ait

$$\eta v = \omega v;$$

on obtiendra en ω l'équation

$$\omega^m - \lambda_{m-1}\omega^{m-1} - \lambda_{m-2}\omega^{m-2} - \ldots - \lambda_1\omega - \lambda = 0.$$

D'après l'hypothèse faite sur η, il faut que cette équation n'admette que

des racines nulles, c'est-à-dire que tous les λ soient nuls. Donc, enfin, on a

$$\eta u_{m-1} = \eta^m u = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

24. On peut déduire de là que *la deuxième équation caractéristique obtenue en partant d'un nombre pseudo-nul* η *n'admet, comme la première, que des racines nulles.* Si non, en effet, il existerait un nombre complexe a, tel que l'on eût

$$a\eta = \omega a,$$

où ω désigne un nombre ordinaire. On déduit de là

$$a\eta^2 = \omega a\eta = \omega^2 a, \quad a\eta^3 = \omega^3 a, \quad \ldots, \quad a\eta^m = \omega^m a, \quad \ldots.$$

Mais, d'après le numéro précédent, appliqué au cas où u est égal à η, il existe un entier m tel que $\eta^m\eta = \eta^{m+1}$ soit nul; par suite, on aurait

$$a\eta^{m+1} = \omega^{m+1} a = 0,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\omega \neq 0$.

Ce théorème complète ce qu'il y avait d'un peu factice dans la définition des nombres pseudo-nuls.

Il résulte, en particulier, de là qu'*étant donné un nombre complexe quelconque* u, *il existe toujours un entier* n *tel que* $u\eta^n$ *soit nul.*

25. *Tous les nombres du système* Σ *qui appartiennent à un caractère* (α, β) *à indices différents sont pseudo-nuls,* d'après la loi de multiplication des caractères (n° 20).

Le produit d'un nombre pseudo-nul de caractère $(1, 1)$, *par exemple, par un nombre complexe quelconque de même caractère est un nombre pseudo-nul.* Si, en effet, η est le nombre pseudo-nul considéré et u un nombre complexe quelconque de caractère $(1, 1)$, on a une équation de la forme

$$\eta u = a\varepsilon_1 + b\eta',$$

a et b étant des nombres ordinaires, η' étant pseudo-nul. Il en résulte

$$\eta^m u = a\eta^{m-1} + b\eta^{m-1}\eta',$$

quel que soit l'entier m au moins égal à 2. Or, nous savons (23) qu'il existe un entier m tel que $\eta^m u$ soit nul; considérons le plus petit de ces entiers;

alors η^{m-1} est différent de zéro, et l'équation

$$b\eta^{m-1}\eta' = -a\eta^{m-1}$$

n'est possible que si a est nul, puisque η' est pseudo-nul.

Le produit ηu est donc bien pseudo-nul.

V.

SYSTÈMES DE NOMBRES COMPLEXES POUR LESQUELS L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE SE DÉCOMPOSE EN ÉQUATIONS LINÉAIRES.

26. Tout ce qui précède se rapporte à des systèmes de nombres complexes quelconques. Nous allons maintenant *séparer les systèmes de nombres complexes en deux grandes classes.*

La première classe est formée des systèmes dont l'équation caractéristique se décompose en équations linéaires.

La seconde des systèmes pour lesquels le premier membre de l'équation caractéristique admet un ou plusieurs facteurs irréductibles de degré supérieur au premier.

Nous verrons que cette distinction est indépendante de l'équation caractéristique dont on part. *Nous trouverons, de plus, un procédé simple pour déduire tous les systèmes de la seconde classe de ceux de la première.*

27. Prenons donc un système de la première classe. Supposons, comme dans le paragraphe précédent, que l'équation caractéristique admette h racines distinctes; ces racines seront, par hypothèse, des formes linéaires de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ (n° 16). Autrement dit, les racines de l'équation caractéristique relative à $u+v$ sont les sommes des racines des équations caractéristiques relatives à u et à v. On peut dire encore que *la somme de deux nombres pseudo-nuls du système est un autre nombre pseudo-nul.*

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, comment on pouvait trouver h modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$. Nous pouvons prendre ces h modules pour h des unités du système et faire en sorte que les $r-h=k$ autres $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ soient toutes des nombres pseudo-nuls (21, 25) et que chacune appartienne à un caractère (α, β) parfaitement déterminé.

On voit alors que tout nombre

$$y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \ldots + y_k\eta_k$$

est pseudo-nul, d'après l'hypothèse faite sur l'équation caractéristique.

28. *Le produit d'un nombre pseudo-nul du système par un autre nombre complexe quelconque est un nombre pseudo-nul.* Remarquons d'abord que si l'on désigne par

$$(1) \qquad x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_h\varepsilon_h + y_1\eta_1 + \ldots + y_k\eta_k,$$

un nombre complexe quelconque du système, la condition nécessaire et suffisante pour que ce nombre soit pseudo-nul est que tous les x soient nuls.

Cela étant, prenons un nombre complexe quelconque u; il suffit de démontrer que les k produits $\eta_1 u$, $\eta_2 u$, ..., $\eta_k u$ sont pseudo-nuls, car alors le produit d'un nombre pseudo-nul quelconque par u sera une combinaison linéaire de nombres pseudo-nuls et, par suite, sera pseudo-nul.

Prenons d'abord une des unités η appartenant au caractère (1, 1). Si l'on regarde u comme une somme de nombres appartenant chacun à un caractère déterminé, le produit total sera une somme de produits partiels appartenant aussi chacun à un caractère déterminé et le seul de ces produits qui puisse donner un nombre non pseudo-nul s'obtient en multipliant η par un nombre de caractère (1, 1). Mais nous avons vu (25) que le produit d'un nombre pseudo-nul de caractère (1, 1) par un autre nombre de caractère (1, 1) est toujours pseudo-nul.

Prenons maintenant une unité η appartenant au caractère (1, 2), par exemple. On voit, comme précédemment, qu'il suffit de se ramener au cas où u appartient au caractère (2, 1). Supposons donc que l'on ait

$$(2) \qquad \eta u = a\varepsilon_1 + b\zeta,$$

a et b étant des nombres ordinaires et ζ un nombre pseudo-nul de caractère (1, 1). Je dis alors que, si a est différent de zéro, le nombre $u\eta$ ne peut pas être pseudo-nul. Sinon, en effet (24), il existerait un entier m tel qu'on eût

$$\eta(u\eta)^m = 0.$$

Mais cette égalité peut s'écrire

$$(\eta u)^m \eta = 0; \tag{3}$$

il est, d'autre part, facile de voir, de proche en proche, que $(\eta u)^m$ est de la forme $a^m \varepsilon_1 + \zeta^{(m)}$, $\zeta^{(m)}$ étant un nombre pseudo-nul, et cela, en tenant compte du résultat précédemment établi que le produit de deux nombres pseudo-nuls de caractère $(1, 1)$ est pseudo-nul. L'équation (3) devient alors, puisque η est de caractère $(1, 2)$,

$$a^m \eta + \zeta^{(m)} \eta = 0,$$

ce qui est impossible si a est différent de zéro, puisque $\zeta^{(m)}$ est pseudo-nul.

On peut donc ajouter à l'équation (2) une équation de la forme

$$u\eta = a' \varepsilon_2 + b' \zeta', \tag{4}$$

ζ' étant un nombre pseudo-nul de caractère $(2, 2)$ et a' étant différent de zéro.

Cela étant, je dis que, si v désigne un nombre quelconque de caractère $(2, 1)$, on ne peut pas avoir

$$\eta v = 0;$$

on aurait, en effet,

$$0 = u(\eta v) = (u\eta) v = a' v + b' \zeta' v,$$

ce qui est incompatible avec les hypothèses que a' n'est pas nul et que ζ' est pseudo-nul. Il en résulte que, ηv étant de caractère $(1, 1)$, *il y a au moins autant de nombres indépendants de caractère* $(1, 1)$ *que de caractère* $(2, 1)$.

De même, w désignant un nombre quelconque de caractère $(1, 1)$, on ne peut pas avoir

$$uw = 0,$$

car on aurait

$$0 = \eta(uw) = aw + b\zeta w,$$

ce qui est encore impossible. *Il y a donc autant de nombres indépendants de caractère* $(2, 1)$ *que de caractère* $(1, 1)$.

De ces deux faits résulte la conséquence qu'on peut toujours déterminer un nombre v de caractère $(2, 1)$, de telle façon que le produit ηv soit un nombre donné quelconque de caractère $(1, 1)$, par exemple ε_1.

Finalement, *il existe deux nombres* η, v *de caractères* $(1, 2)$ *et* $(2, 1)$

satisfaisant à la relation

(5) $$\eta v = \varepsilon_1.$$

Par suite, on a

(6) $$(\eta + v)(\varepsilon_1 + v) = \varepsilon_1 + v.$$

Le nombre $\eta + v$ ne serait donc pas pseudo-nul, ce qui est impossible, d'après les hypothèses faites, puisque c'est la somme de deux nombres pseudo-nuls.

Le théorème est donc finalement démontré et l'on peut, en le généralisant d'une façon évidente, l'énoncer de la façon suivante :

Le produit d'un nombre complexe pseudo-nul par un nombre complexe quelconque, de même que le produit d'un nombre complexe quelconque par un nombre pseudo-nul sont des nombres pseudo-nuls.

29. Cela étant, l'ensemble des nombres pseudo-nuls du système donné Σ forme lui-même un système σ jouissant des propriétés suivantes :

La somme et le produit de deux nombres de σ fait encore partie de σ, et, de plus, l'opération de la multiplication satisfait à la loi associative. Mais ici la division est impossible; autrement dit, étant donné un nombre arbitraire de σ, il n'est pas possible de trouver un autre nombre qui, multiplié par le premier, reproduise un nombre donné. On peut dire encore que le système σ n'admet pas de module.

D'une façon plus précise, étant donné un nombre η de σ, il est impossible de trouver un nombre u tel que l'on ait une relation de la forme

$$\eta u = \omega u,$$

ω étant différent de zéro.

Les modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ de Σ ne vont plus maintenant jouer qu'un rôle accessoire, et tout revient à étudier le système σ.

30. Supposons, d'abord, que σ contienne une seule unité indépendante η. On aura alors nécessairement

$$\eta^2 = a\eta,$$

a étant un nombre ordinaire; mais, d'après les propriétés de σ, ce nombre

est nécessairement nul. Par suite

$$\eta^2 = 0. \tag{7}$$

Il n'y a donc qu'une seule loi possible de multiplication pour les systèmes σ d'ordre 1.

Supposons, maintenant, que σ contienne deux unités indépendantes η_1 et η_2. Il existe, certainement, au moins un nombre du système qui, multipliée par η_1, donne un produit nul. Supposons, d'abord, qu'il y en ait un seul indépendant; ou bien il est multiple de η_1, ou bien il en est indépendant et, par suite, peut être pris pour η_2. On a donc les deux cas suivants :

1° $\qquad \eta_1^2 = 0, \qquad \eta_2\eta_1 = a\eta_1 + b\eta_2,$

2° $\qquad \eta_1^2 = a\eta_1 + b\eta_2, \qquad \eta_2\eta_1 = 0,$

dans chacun des cas les nombres a et b n'étant pas tous les deux nuls.

Prenons d'abord le premier cas : on en déduit

$$(a\eta_1 + b\eta_2)\eta_1 = b(a\eta_1 + b\eta_2),$$

d'où l'on déduit que b est nul et, par suite, aussi a, sinon η_2 ne serait pas pseudo-nul. Le premier cas est donc impossible.

Dans le second cas, on a

$$(a\eta_1 + b\eta_2)\eta_1 = a(a\eta_1 + b\eta_2),$$

d'où l'on déduit que a est nul et, par suite, b doit être différent de zéro. On a donc

$$\eta_1^2 = b\eta_2, \qquad \eta_2\eta_1 = 0 \qquad (b \neq 0). \tag{8}$$

On déduit de là que $(\eta_1\eta_2)\eta_1$ est nul et, par suite, que $\eta_1\eta_2$ est proportionnel à η_2, ce qui n'est possible que si $\eta_1\eta_2$ est nul. Enfin, on voit de même que $\eta_2^2\eta_1$ est nul et, par suite, aussi η_2^2. Finalement, la loi de la multiplication est exprimée par les formules

$$\eta_1^2 = b\eta_2, \qquad \eta_1\eta_2 = \eta_2\eta_1 = \eta_2^2 = 0. \tag{9}$$

Enfin, il nous reste à supposer que tous les nombres du système, multipliés par η_1, donnent des produits nuls, ce qui est exprimé par les formules

$$\eta_1^2 = \eta_2\eta_1 = 0. \tag{10}$$

On a alors

$$\eta_1\eta_2 = a\eta_1 + b\eta_2, \qquad \eta_2^2 = c\eta_1 + d\eta_2,$$

d'où l'on déduit

$$\eta_1(a\eta_1 + b\eta_2) = b(a\eta_1 + b\eta_2),$$
$$\eta_1(c\eta_1 + d\eta_2) = d(c\eta_1 + d\eta_2),$$

relations qui entraînent

$$b = 0, \qquad d = 0,$$

et, par suite, aussi

$$a = 0.$$

En échangeant η_1 et η_2 et remplaçant c par b on retombe sur les formules (9), mais où b peut être nul.

31. Nous allons maintenant démontrer, d'une manière générale, le théorème suivant :

Étant donné un système σ de nombres pseudo-nuls contenant k unités indépendantes $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, on peut supposer choisies ces k unités de telle façon que le produit de deux unités η_i, η_j ne dépende que des unités dont l'indice est supérieur aux deux indices i, j.

Le théorème est vrai pour $k = 1$ et $k = 2$, comme cela résulte des formules (7) et (9). Nous allons le supposer vrai pour $1, 2, \ldots, k-1$ et le démontrer pour k.

Considérons donc un système σ de k unités, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$. Il existe certainement au moins un nombre complexe u tel que le produit $\eta_1 u$ soit nul. Je vais d'abord démontrer qu'*il existe un nombre u tel que tous les produits $\eta_1 u$, $\eta_2 u$, $\ldots$, $\eta_k u$ soient nuls.*

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Cherchons tous les nombres u pour lesquels le produit $\eta_1 u$ est nul ; il se peut que parmi ces nombres il y en ait pour lesquels $\eta_2 u$ est nul ; il se peut, de même, qu'il y en ait pour lesquels $\eta_1 u$, $\eta_2 u$, $\eta_3 u$ soient nuls à la fois ; mais, par hypothèse, on ne pourra pas continuer ainsi indéfiniment. Supposons donc qu'il existe n nombres indépendants et n seulement $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tels que tous les produits

$$\eta_1 u_i, \quad \eta_2 u_i, \quad \ldots, \quad \eta_m u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ m < k)$$

soient nuls, mais tels que, pour aucun des nombres u se déduisant linéairement de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, le produit $\eta_{m+1} u$ soit nul. On peut manifeste-

ment supposer que les nombres $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ forment un *système* σ_1 de nombres pseudo-nuls, c'est-à-dire que le produit de deux d'entre eux se déduise linéairement de $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$; car de

$$\eta_2 u_i = 0,$$

par exemple, on déduit

$$(\eta_1 \eta_2) u_i = 0,$$

ce qui montre qu'on peut ajouter aux nombres $y_1 \eta_1 + \ldots + y_m \eta_m$ le nombre $\eta_1 \eta_2$ s'il n'en fait pas déjà partie.

Le nombre m étant inférieur à k, nous pouvons appliquer au système σ_1 le théorème à démontrer et supposer que le produit $\eta_i \eta_j (i, j \leqq m)$ ne dépend que de $\eta_{i+1}, \eta_{i+2}, \ldots, \eta_m$, si i est le plus grand des nombres i et j.

32. Cela étant, les n nombres $\eta_{m+1} u_1, \eta_{m+1} u_2, \ldots, \eta_{m+1} u_n$ sont certainement linéairement indépendants, sans quoi un des nombres $\eta_{m+1} u$ serait nul. Appelons-les $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de sorte que

$$\eta_{m+1} u_i = v_i.$$

Je dis maintenant qu'étant donné un nombre quelconque de σ, soit v, il existe toujours un nombre η de σ_1 tel que le produit ηv soit une combinaison linéaire non nulle de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, si le nombre v lui-même ne l'est pas déjà. En effet, considérons le produit $\eta_m v$. On a, d'après le numéro précédent,

$$\eta_1(\eta_m v) = \eta_2(\eta_m v) = \ldots = \eta_m(\eta_m v) = 0,$$

ce qui montre ou bien que $\eta_m v$ est nul, ou bien que $\eta_m v$ est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si c'est le dernier cas qui a lieu, la proposition est démontrée. Sinon, on a

$$\eta_m v = 0.$$

Prenons alors $\eta_{m-1} v$; on verra, comme tout à l'heure, que ce produit est nul ou est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et ainsi de suite. Ou bien un des nombres ηv sera une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_n$; ou bien tous les nombres ηv seront nuls, et alors v lui-même sera une combinaison linéaire des u.

Appliquons cela aux nombres $v_1, v_2, \ldots, v_n$, c'est-à-dire aux nombres $\eta_{m+1} u_1, \eta_{m+1} u_2, \ldots, \eta_{m+1} u_n$. *Nous voyons alors qu'à chacun u_i des nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n$ on peut faire correspondre un nombre ζ_i du système σ tel*

que $\zeta_1 u_1, \zeta_2 u_2, \ldots, \zeta_n u_n$ *ne dépendent que de* $u_1, u_2, \ldots, u_n$, *ces produits étant différents de zéro.*

33. Partons maintenant de u_1 et considérons le nombre $\zeta_1 u_1$, il ne peut pas être proportionnel à u_1, puisque ζ_1 est pseudo-nul. On peut donc prendre ce produit pour nombre u_2, puis $\zeta_2 u_2$ pour nombre u_3 et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on tombe sur une combinaison linéaire des nombres u précédemment utilisés. Soit donc

$$(11) \qquad \zeta_1 u_1 = u_2, \qquad \zeta_2 u_2 = u_3, \qquad \ldots, \qquad \zeta_p u_p = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p,$$

les constantes λ n'étant pas toutes nulles ; on peut même supposer que λ_1 est différent de zéro. On déduit de là

$$(\zeta_p \zeta_{p-1} \ldots \zeta_2 \zeta_1 - \lambda_p \zeta_{p-1} \ldots \zeta_1 - \lambda_{p-1} \zeta_{p-2} \ldots \zeta_1 - \ldots - \lambda_2 \zeta_1) u_1 = \lambda_1 u_1,$$

égalité qui est impossible, le premier facteur du premier membre étant un nombre pseudo-nul.

34. Il résulte de là que l'hypothèse adoptée ne peut pas se présenter et que, par suite, l'un au moins des nombres u est tel que $\eta_{m+1} u$ soit nul. En continuant de proche en proche, *on démontre donc l'existence d'un nombre* u *tel que tous les produits* $\eta_1 u, \ldots, \eta_k u$ *soient nuls.*

Supposons qu'il y ait exactement n nombres indépendants $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jouissant de cette propriété, *je dis maintenant qu'il y a au moins un nombre* u, *combinaison linéaire de* $u_1, u_2, \ldots, u_n$, *tel que tous les produits* $u\eta$ *soient nuls.*

En effet, d'abord tous les produits $u_1\eta, u_2\eta, \ldots, u_n\eta$ sont des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, puisqu'on a, quel que soit le nombre η_i,

$$\eta_i u_1 \eta = \eta_i u_2 \eta = \ldots = \eta_i u_n \eta = 0.$$

Il résulte de là que, étant donné un nombre quelconque η, il existe un nombre u, combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, tel que $u\eta$ soit nul. Supposons, d'une manière plus générale, qu'il y ait p nombres indépendants u, et p seulement $u_1, u_2, \ldots, u_p$, tels que tous les produits

$$u_i\eta_1, \quad u_i\eta_2, \quad \ldots, \quad u_i\eta_m \qquad (m < k;\ i = 1, 2, \ldots, p)$$

soient nuls. Je dis qu'il y a un nombre $u = x_1 u_1 + \ldots + x_p u_p$ pour le-

quel $u\eta_{m+1}$ est nul. Il suffit de refaire le raisonnement des paragraphes précédents, en le modifiant un peu. Nous voyons alors, ce point admis, qu'en procédant de proche en proche, on arrive à un nombre u pour lequel tous les $u\eta$ sont nuls.

35. Finalement nous avons démontré qu'*il existe dans le système* σ *un nombre qui, multiplié à droite ou à gauche par un nombre quelconque de* σ, *donne un produit nul.* Nous pouvons prendre ce nombre pour unité η_k, et nous voyons qu'on a

$$\eta_i\eta_k = \eta_k\eta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{12}$$

Cela étant, dans les formules

$$\eta_i\eta_j = \sum \beta_{ijs}\eta_s,$$

qui donnent la loi de multiplication du système σ, supprimons dans les seconds membres les termes en η_k ; autrement dit considérons $k-1$ unités $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1}$ telles qu'on pose

$$\zeta_i\zeta_j = \sum_{s=1}^{s=k-1} \beta_{ijs}\zeta_s \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Je dis que la multiplication ainsi définie satisfait encore à la loi associative, c'est-à-dire que l'on a, quels que soient les indices λ, μ, ν,

$$(\zeta_\lambda\zeta_\mu)\zeta_\nu = \zeta_\lambda(\zeta_\mu\zeta_\nu).$$

Il suffit, en effet, de considérer l'identité

$$(\eta_\lambda\eta_\mu)\eta_\nu = \eta_\lambda(\eta_\mu\eta_\nu).$$

On peut, dans le produit des deux nombres $\eta_\lambda\eta_\mu$ et η_ν, supprimer les termes en η_k du premier facteur, puisqu'ils ne donnent rien, multipliés par η_ν ; mais alors $\eta_\lambda\eta_\mu$ devient une expression η' composée avec η_1, $\eta_2, \ldots, \eta_{k-1}$ comme $\zeta_\lambda\zeta_\mu$ est composée avec $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1}$; par suite, si l'on supprime du produit $\eta'\eta_\nu$ les termes en η_k, on obtient une expression composée avec $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{k-1}$, comme $(\zeta_\lambda\zeta_\mu)\zeta_\nu$ l'est avec $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1}$, et cette expression s'obtient simplement en supprimant du produit $(\eta_\lambda\eta_\mu)\eta_\nu$ les termes en η_k. En répétant le raisonnement pour $\eta_\lambda(\eta_\mu\eta_\nu)$, on arrive au résultat cherché.

36. Nous pouvons maintenant appliquer au système des $k-1$ unités ζ le théorème supposé vrai. On voit alors que dans les constantes β_{ijs}, où i, j, s sont inférieurs à k, on peut supposer s supérieur à chacun des nombres i et j. Par suite, comme pour i ou j égal à k, les constantes sont nulles, on voit que la règle est encore vraie lorsqu'un ou plusieurs des indices i, j, s sont égaux à k.

On peut donc choisir les unités $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ de σ de telle sorte que le produit $\eta_i\eta_j$ ne dépende que de $\eta_{i+1}, \ldots, \eta_k$ si i est supérieur ou égal à j, et de $\eta_{j+1}, \ldots, \eta_k$ si j est supérieur ou égal à i.

37. Dans ce qui précède, nous n'avons pas respecté la convention supposée au début du paragraphe, d'après laquelle les unités $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ étaient supposées appartenir chacune à un *caractère* déterminé. Mais il est facile de voir comment on peut lever cette difficulté.

Supposons, en effet, que l'unité η_k déterminée dans les paragraphes précédents n'appartienne pas à un caractère déterminé ; alors elle est une somme de nombres appartenant chacun à un certain caractère. Multiplions alors η_k par un nombre η appartenant au caractère (α, β) par exemple ; le produit est une somme de produits partiels dont chacun est nul ou appartient à un caractère déterminé distinct, et comme ce produit total doit être nul, il faut que chacun des produits partiels le soit. On reconnaît ainsi que chaque terme de la somme qui forme η_k jouit de la même propriété que η_k. Par suite, on peut prendre l'un d'eux pour η_k, c'est-à-dire supposer que l'nnité η_k appartient à un caractère déterminé. Il en est de même de proche en proche pour les autres.

38. Nous avons finalement le théorème suivant qui résume tout ce paragraphe.

Étant donné un système de nombres complexes d'ordre r, pour lequel l'équation caractéristique se décompose en équations linéaires, on peut toujours choisir les $r = h + k$ unités de ce système $e_1, e_2, \ldots, e_h, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, de telle façon que les conditions suivantes soient réalisées :

1° *Le carré d'une des unités $e_1, e_2, \ldots, e_h$ est égal à cette même unité, les produits de deux unités e différentes étant nuls ;*

2° *A chaque unité η on peut faire correspondre un couple de deux indices α, β inférieurs ou égaux à h, qui constituent le caractère de*

cette unité, et tels que les deux produits $e_\alpha \eta$, ηe_β sont égaux à η, tous les autres produits $e_i \eta$, ηe_j étant nuls ;

3° Le produit de deux unités η dont la première est de caractère (α, β) et la seconde de caractère (γ, δ) est nul si β est différent de γ, et est une combinaison linéaire des unités de caractère (α, δ) si β est égal à γ ;

4° Le produit de deux unités η_i, η_j d'indices i et j est une combinaison linéaire des unités η dont l'indice est supérieur à chacun des indices i et j.

Il est bien évident que les constantes qui restent dans l'expression des produits $\eta_i \eta_j$ ne peuvent pas être prises arbitrairement. Elles doivent toujours être telles que la loi associative soit vérifiée.

39. Supposons réciproquement qu'un système de nombres complexes satisfasse aux conditions énoncées dans le numéro précédent. Je dis que son équation caractéristique se décompose en équations linéaires. Nous allons, pour cela, ranger les unités dans l'ordre suivant : e_1, puis les unités η de caractère $(1, 1), (2, 1), \ldots, (h, 1)$ dans l'ordre de leurs indices croissants ; ensuite e_2 et les unités η de caractères $(1, 2), (2, 2), \ldots, (h, 2)$, dans l'ordre de leurs indices, et ainsi de suite. Soient $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ les unités ainsi rangées et désignons par

$$z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2 + \ldots + z_r\zeta_r = x_1 e_1 + \ldots + x_h e_h + y_1 \eta_1 + \ldots + y_k \eta_k$$

un nombre complexe quelconque du système. Enfin nous désignerons par $n_{\alpha\beta}$ le nombre des unités η de caractère (α, β), et nous poserons

$$n_\beta = n_{1\beta} + n_{2\beta} + \ldots + n_{h\beta} + 1.$$

Si nous nous reportons à la forme (7) (n° 16) de l'équation caractéristique

$$(13) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \sum z_i \alpha_{i11} - \omega & \sum z_i \alpha_{i21} & \sum z_i \alpha_{ir1} \\ \sum z_i \alpha_{i12} & \sum z_i \alpha_{i22} - \omega & \sum z_i \alpha_{ir2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \sum z_i \alpha_{i1r} & \sum z_i \alpha_{i2r} & \sum z_i \alpha_{irr} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

nous voyons que tous les éléments du déterminant du premier membre qui

sont dans l'une des n_1 premières lignes et dans l'une des $r - n_1$ premières colonnes sont nuls. En effet, il n'entre dans ces éléments que des constantes $\alpha_{i\lambda\mu}$ pour lesquelles λ est supérieur à n_1, c'est-à-dire correspond à une unité dont le caractère n'a pas 1 pour second indice, et μ est au plus égal à n_1, c'est-à-dire correspond à une unité dont le caractère a 1 pour second indice ; or, le produit d'une unité quelconque ζ_i par une unité ζ_λ de caractère $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, ..., (α, h) ne peut pas dépendre d'unités ζ_μ de caractère $(1, 1)$, $(2, 1)$, ..., $(h, 1)$.

Il résulte de là que le déterminant Δ contient en facteur un déterminant d'ordre n_1, celui qu'on obtient en prenant les n_1 premières lignes et les n_1 premières colonnes du déterminant Δ. Il contient, de même, en facteur $h - 1$ autres déterminants d'ordre n_2, n_3, ..., n_h.

Considérons alors le premier de ces déterminants. Toutes les constantes α_{i11} sont nulles, sauf α_{111} qui est égal à 1 ; de plus les constantes $\alpha_{i\lambda\mu}$ ne sont différentes de zéro que si μ est supérieur à i et λ, sauf les constantes $\alpha_{1\lambda\lambda}$ qui sont égales à l'unité. Il en résulte que, dans le premier déterminant partiel, tous les éléments qui sont en haut et à droite de la diagonale principale sont nuls et ceux de la diagonale principale se réduisent tous à $z_1 - \omega = x_1 - \omega$.

Par suite ce déterminant se réduit à $(x_1 - \omega)^{n_1}$ et l'on a pour Δ la valeur

$$\Delta = (x_1 - \omega)^{n_1}(x_2 - \omega)^{n_2}\ldots(x_h - \omega)^{n_h}. \tag{14}$$

Cette formule démontre la réciproque.

40. Mais il y a plus. Si l'on considère la deuxième équation caractéristique

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \sum z_i\alpha_{1i1} - \omega & \sum z_i\alpha_{2i1} & \ldots & \sum z_i\alpha_{ri1} \\ \sum z_i\alpha_{1i2} & \sum z_i\alpha_{2i2} - \omega & \ldots & \sum z_i\alpha_{ri2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum z_i\alpha_{1ir} & \sum z_i\alpha_{2ir} & \ldots & \sum z_i\alpha_{rir} - \omega \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

on peut répéter sur le déterminant Δ' les mêmes raisonnements que sur le déterminant Δ, mais en supposant ici les unités rangées de telle sorte que l'on ait d'abord les unités de caractères $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, h)$, puis celles

de caractères $(2, 1)$, $(2, 2)$, ..., $(2, h)$, et ainsi de suite. En posant alors

$$n'_\alpha = n_{\alpha 1} + n_{\alpha 2} + \ldots + n_{\alpha h} + 1,$$

on voit que Δ' prend la forme suivante

$$(16) \qquad \Delta' = (x_1 - \omega)^{n'_1} (x_2 - \omega)^{n'_2} \ldots (x_h - \omega)^{n'_h}.$$

L'équation (16) montre donc que le deuxième déterminant caractéristique se décompose, lui aussi, en facteurs linéaires, et de plus que ces facteurs sont les mêmes que ceux du premier, aux ordres de multiplicité près.

41. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si une des équations caractéristiques d'un système de nombres complexes se décompose en équations linéaires, il en est de même de l'autre; les racines sont les mêmes dans ces deux équations, aux ordres de multiplicité près; enfin il n'y a aucune relation linéaire à coefficients constants entre ces racines.

Il est bon d'ajouter que les modules partiels e_1, e_2, ..., e_h qui entrent dans l'énoncé du n° 38 ne sont pas toujours déterminés sans ambiguïté. Prenons par exemple $h = 2$, $k = 1$ et supposons que l'unité η soit de caractère $(1, 2)$. On vérifie facilement qu'en prenant $e_1 + \eta$, $e_2 - \eta$ au lieu de e_1 et e_2 la loi de multiplication reste la même. *Il faut et il suffit d'ailleurs* (19) *que les h nouvelles unités e'_1, ..., e'_h satisfassent aux relations $e'^2_i = e_i$, $e'_i e'_j = 0$.*

Mais ce qui est déterminé sans ambiguïté, ce sont naturellement les entiers h, k, n_1, n_2, ..., n_h, n'_1, n'_2, ..., n'_h, et *aussi tous les entiers* $n_{\alpha\beta}$. Pour se rendre compte de ce dernier point, remarquons que les nombres pseudo-nuls du système sont déterminés sans ambiguïté. Il en est de même parmi eux de ceux dont le produit, à droite ou à gauche, par un nombre pseudo-nul quelconque, est nul; appelons ζ_1, ζ_2, ... celles des unités η_1, η_2, ..., η_k du n° 38 qui satisfont à cette condition. Ceux des nombres pseudo-nuls dont le produit par un nombre pseudo-nul quelconque ne dépend que des ζ sont alors déterminés sans ambiguïté, à des nombres ζ près; désignons celles des unités η qui satisfont à cette condition par θ_1, θ_2, ...; et ainsi de suite. Si nous partons d'un système de modules partiels e_1, e_2, ..., e_h déterminé, nous pouvons supposer que les unités ζ, θ, ... appartiennent à un *caractère* déterminé par rapport à ce système de modules.

Tout nouveau système de modules partiels s'obtiendra manifestement en prenant

$$e'_1 = e_1 + \eta^{(1)}, \quad e'_2 = e_2 + \eta^{(2)}, \quad \ldots, \quad e'_h = e_h + \eta^{(h)},$$

les $\eta^{(i)}$ étant des nombres pseudo-nuls convenablement choisis; cela résulte de ce que l'ensemble des nombres $x_1 e_1 + y_1 \eta_1 + \ldots + y_k \eta_k$ s'obtient en égalant à zéro les $h - 1$ dernières racines de l'équation caractéristique et, par suite, cet ensemble est indépendant du système de modules choisi.

Cela étant, si ζ_1 appartenait au caractère (α, β), il en est encore de même maintenant, puisque tous les $\eta^{(i)}\zeta_1$ et $\zeta_1\eta^{(i)}$ sont nuls. Prenons maintenant un des nombres θ appartenant *maintenant* au caractère (α, β); il est de la forme

$$\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \ldots + \mu_1\zeta_1 + \mu_2\zeta_2 + \ldots = \theta_0 + \zeta_0;$$

on a

$$(e_\alpha + \eta^{(\alpha)})(\theta_0 + \zeta_0) = (\theta_0 + \zeta_0)(e^\beta + \eta^{(\beta)}) = \theta_0 + \zeta_0;$$

d'où l'on déduit, en prenant les termes indépendants des ζ,

$$e_\alpha\theta_0 = \theta_0 e_\beta = \theta_0, \qquad e_i\theta_0 = \theta_0 e_j = 0, \qquad i \neq \alpha, \qquad j \neq \beta.$$

Le nombre $\theta_0 + \zeta_0$ peut donc être obtenu en ajoutant un nombre ζ à un des nombres θ qui *avait* le caractère (α, β). On peut procéder ainsi de proche en proche. On voit que l'on peut prendre de nouvelles unités η ayant chacune un caractère déterminé et provenant chacun d'une ancienne unité de même caractère. Les nombres $n_{\alpha\beta}$ sont donc restés les mêmes.

42. *Pour chaque système de nombres complexes de la première classe, nous avons donc un certain nombre d'entiers* INVARIANTS, *à savoir d'abord le nombre r des unités indépendantes, le nombre h des racines distinctes de l'une quelconque des équations caractéristiques, et enfin un tableau carré de h^2 entiers.*

On peut facilement déduire de là que si deux systèmes de nombres complexes de la première classe sont donnés chacun par r unités $e_1, e_2, \ldots, e_h, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, les h premières étant des modules partiels et les k autres appartenant à un caractère déterminé, les deux systèmes seront distincts ou non suivant d'abord que les deux séries de nombres h, $n_{\alpha\beta}$ seront ou non différentes et ensuite suivant qu'il sera impossible ou non de remplacer les unités η de caractère (α, β) d'un des systèmes par d'autres unités de même

caractère de façon que la loi de multiplication des η devienne la même pour les deux systèmes.

Cherchons, par exemple, tous les systèmes de première classe pour lesquels $h = 2$, $n_{11} = n_{22} = 1$, $n_{12} = 2$, $n_{21} = 0$. Appelons η, η', η'', η''' les quatre unités pseudo-nulles, appartenant respectivement aux caractères (1, 1), (2, 2), (1, 2) et (1, 2). Il n'y a que les produits $\eta\eta''$, $\eta\eta'''$, $\eta''\eta'$, $\eta'''\eta'$ qui puissent être différents de zéro. Supposons les unités η rangées comme il est dit au n° 31 ; on peut alors supposer que η''' est placée après η''; par suite les produits $\eta\eta'''$, $\eta'''\eta'$, qui ne peuvent dépendre que de η'', η''', sont nécessairement nuls. Donc on peut prendre η''' pour dernière unité η_4. Alors les deux autres produits $\eta\eta''$, $\eta''\eta'$ ne pouvant dépendre que de η_4, on peut ranger η, η', η'' dans n'importe quel ordre, par exemple

$$\eta_1 = \eta, \qquad \eta_2 = \eta', \qquad \eta_3 = \eta'', \qquad \eta_4 = \eta''';$$

alors tous les produits sont nuls sauf

$$\eta_1\eta_3 = a\eta_4, \qquad \eta_3\eta_2 = b\eta_4;$$

et l'on peut même supposer les constantes a et b réduites à zéro ou l'unité, ce qui donne *quatre* cas distincts.

VI.

SYSTÈMES DE NOMBRES COMPLEXES DE LA DEUXIÈME CLASSE.

43. Les systèmes de nombres complexes de la deuxième classe sont ceux pour lesquels le premier membre de l'équation caractéristique contient un ou plusieurs facteurs irréductibles en ω, x_1, x_2, ..., x_r de degré supérieur à l'unité.

Nous pouvons toujours, d'après les développements du paragraphe IV, supposer pris pour unités d'abord h modules partiels ε_1, ε_2, ..., ε_h et ensuite $k = r - h$ unités pseudo-nulles η_1, η_2, ..., η_k dont chacune appartient à un caractère déterminé. Naturellement tout nombre qui se déduit linéairement de η_1, η_2, ..., η_k n'est plus nécessairement pseudo-nul.

Nous savons de plus que l'ensemble des nombres de caractère (1, 1) forme un système *de la première classe*, et par suite nous pouvons supposer choisies les unités η de caractère (1, 1) de telle sorte que le produit de deux d'entre elles ne dépende que des unités η de même caractère dont les indices

sont supérieurs à chacun des indices des premières. Il en est de même pour les unités η de caractère (2, 2), ..., (h, h).

44. En ce qui regarde l'équation caractéristique, nous pouvons, comme au n° 39, désigner par

$$z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2 + \ldots + z_r\zeta_r$$

un nombre quelconque du système, les symboles $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ désignant les r unités e, η rangées de telle façon que les n_1 premières soient d'abord e_1 et ensuite les unités η dont le caractère a 1 pour second indice; les n_2 suivantes étant e_2 puis les unités η dont le caractère a 2 pour second indice; et ainsi de suite.

Si nous considérons alors le déterminant Δ du n° 16

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \sum z_i \alpha_{i11} - \omega & \sum z_i \alpha_{i21} & \ldots & \sum z_i \alpha_{ir1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum z_i \alpha_{i1r} & \sum z_i \alpha_{i2r} & \ldots & \sum z_i \alpha_{irr} - \omega \end{vmatrix},$$

nous verrons (39) que tous les éléments appartenant à l'une des n_1 premières lignes et des $r - n_1$ dernières colonnes sont nuls, de sorte que Δ contient en facteur un déterminant Δ_1 d'ordre n_1 formé des n_1 premières lignes et des n_1 premières colonnes; et de même $h - 1$ autres déterminants $\Delta_2, \ldots, \Delta_h$ d'ordres $n_2, \ldots, n_h$.

45. Considérons maintenant le déterminant Δ_1 et voyons comment y entre la variable z_1, qui se rapporte à l'unité $\zeta_1 = e_1$. Il est clair que tous les coefficients $\alpha_{1\lambda\mu}$ sont nuls pour λ différent de μ, et que les coefficients $\alpha_{1\lambda\lambda}$ sont nuls si ζ_λ n'est pas d'indice (1, 1) et sont égaux à 1 si ζ_λ est d'indice (1, 1). Il en est de même de z_{n_1+1} (qui se rapporte à e_2) qui ne figure que dans les éléments de la diagonale principale avec le coefficient $\alpha_{n_1+1,\lambda,\lambda}$ égal à 1 que si ζ_λ appartient à l'indice (2, 1); de même pour les autres z coefficients de $e_2, e_3, \ldots, e_h$.

Nous voyons par là qu'en réintroduisant les variables x, y

$$x_1e_1 + \ldots + x_he_h + y_1\eta_1 + \ldots + y_k\eta_k = z_1\zeta_1 + \ldots + z_r\zeta_r,$$

le déterminant Δ_1 *est homogène en* $x_1 - \omega, x_2 - \omega, \ldots, x_h - \omega, y_1, y_2, \ldots, y_k$, les variables $x_1, x_2, \ldots, x_h$ n'entrant en effet que dans la diagonale prin-

cipale, et chaque élément de la diagonale principale contenant une de ces variables et une seule avec le coefficient 1.

46. Cela étant, si nous posons

$$x'_1 = x_1 - \omega, \qquad x'_2 = x_2 - \omega, \qquad \ldots, \qquad x'_h = x_h - \omega,$$

le déterminant Δ_1 ne contient que $x'_1, x'_2, \ldots, x'_h$; $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Si nous convenons de dire que x'_i appartient au caractère (i, i) et y_i au caractère (α, β) de η_i, l'on voit facilement que Δ_1 est homogène et de degré $n_{\alpha 1}$ (ou $n_{\alpha 1} + 1$ si $\alpha = 1$) par rapport aux variables x', y dont le caractère a α pour premier indice. En effet, une telle variable z_i ne peut se présenter dans Δ_1 avec le coefficient $\alpha_{i\lambda\mu}$ que si le caractère de ζ_μ admet α pour premier indice; et réciproquement si le caractère de ζ_μ admet α pour premier indice, le coefficient $\alpha_{i\lambda\mu}$ ne peut être différent de zéro que si ζ_i admet aussi α pour premier indice. Δ_1 est donc homogène par rapport aux variables z_i dont le caractère admet α pour premier indice et le degré d'homogénéité est égal au nombre des unités $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n_1}$ dont le caractère a le même premier indice, c'est-à-dire dont le caractère est $(\alpha, 1)$. Le degré d'homogénéité est donc bien $n_{\alpha 1}$ ou $n_{\alpha 1} + 1$.

De même Δ_1 est homogène et du même degré d'homogénéité $n_{\alpha 1}$ (ou $n_{\alpha 1} + 1$) par rapport aux variables x', y dont le caractère admet α pour *second* indice.

47. Ces préliminaires étant posés, supposons décomposé le déterminant Δ en ses facteurs irréductibles

$$(2) \qquad \Delta = P_1^{q_1} P_2^{q_2} \ldots P_l^{q_l},$$

Le déterminant Δ admettant Δ_1 pour diviseur, il est clair que Δ_1 est de la forme

$$(3) \qquad \Delta_1 = P_1^{q'_1} P_2^{q'_2} \ldots P_l^{q'_l},$$

les entiers $q'_1, q'_2, \ldots, q'_l$ pouvant être en partie nuls. D'autre part le nombre des racines distinctes en ω de Δ est égal à la somme des nombres des racines distinctes de $P_1, P_2, \ldots, P_l$ et comme ces l polynomes sont irréductibles, à la somme des degrés de $P_1, P_2, \ldots, P_l$. La somme des degrés de ces polynomes est donc h.

Or, pour $y_1 = y_2 = \ldots = y_k = 0$, le déterminant Δ se réduit à

$$(x_1 - \omega)^{n_1}(x_2 - \omega)^{n_2} \ldots (x_h - \omega)^{n_h};$$

il en résulte, d'après la formule (2), que chacun des polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_l$ se réduit, dans les mêmes conditions, à un produit de facteurs $(x_1 - \omega), \ldots, (x_h - \omega)$. Comme tous ces facteurs doivent y figurer et que la somme des degrés de $P_1, \ldots, P_h$ est précisément égal au nombre de ces facteurs, il en résulte que chacun des polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_l$, par exemple P_1, se réduit, pour $y_1 = y_2 = \ldots = y_k = 0$, à un produit tel que

$$(4) \qquad P_1^0 = (x_1 - \omega)(x_2 - \omega)\ldots(x_p - \omega) = x'_1 x'_2 \ldots x'_p,$$

à un facteur constant près qu'on peut toujours supposer égal à l'unité.

Considérons, maintenant, la formule (3). Le premier nombre Δ_1 de cette formule est *homogène* par rapport aux variables x', y dont les caractères sont $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, $\ldots$, (α, h). Cette quantité Δ_1 est, d'autre part, égale au produit de polynomes en ces mêmes variables. Or, un produit de polynomes ne peut être homogène que si chacun des polynomes est homogène. Il en résulte donc que chacun des facteurs $P_1, P_2, \ldots, P_l$ est homogène par rapport aux variables considérées plus haut dont les caractères sont $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, h)$ et, de même, par rapport aux variables dont les caractères sont $(1, \alpha)$, $(2, \alpha)$, $\ldots$, (h, α).

Pour avoir les degrés d'homogénéité correspondants, il suffit de prendre *un* des termes de chacun des facteurs en question. Prenons, par exemple, le polynome P_1. Un de ses termes est, d'après (4), $x'_1 x'_2 \ldots x'_p$. Il est homogène et du premier degré par rapport aux variables x', y dont le caractère a pour premier ou pour second indice l'un quelconque des nombres 1, 2, $\ldots$, p.

Par suite, *le polynome* P_1 *est un polynome en* $x'_1, x'_2, \ldots, x'_h, y_1, y_2, \ldots, y_k$. *Il est, de plus, linéaire et homogène par rapport à celles de ces variables dont le caractère admet* 1 *pour premier indice, de même pour celles dont le caractère admet respectivement* 2, 3, $\ldots$, p *pour premier indice, et, enfin, pour celles dont le caractère admet respectivement* 1, 2, 3, $\ldots$, p *pour second indice. Ce polynome ne contient pas les autres variables.*

On voit que, pour avoir P_1, on pourrait ne considérer que les nombres du système dont le caractère a des indices ne dépassant pas p. Ces nombres forment manifestement un système Σ_1 dont l'équation caractéristique se réduit à $P_1^{q_1} = 0$.

48. Il résulte de là que, si l'on désigne symboliquement par $[\alpha, \beta]$ une

variable de caractère (α, β), un terme quelconque de P_1 peut se représenter par un symbole analogue au suivant

$$(5)\quad \{[1,2][2,3]\ldots[\alpha-1,\alpha][\alpha,1]\}\{[\alpha+1,\alpha+2]\ldots[\beta,\alpha+1]\}\ldots[\gamma+1,\gamma+1]\ldots[p,p];$$

les $p-\gamma$ derniers termes ayant des caractères à indices égaux.

Cela étant, considérons les termes dans lesquels le nombre des facteurs $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ est le plus petit possible. Si nous faisons dans l'équation caractéristique

$$(6)\qquad P_1 = 0,$$

de Σ_1, $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$, les facteurs $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ doivent être remplacés par ω. Nous considérons donc, en somme, dans ces conditions les termes de plus bas degré de l'équation (6) en ω. Supposons que l'expression (5) soit un de ces termes et que ω figure dans les $p-\lambda$ derniers termes

$$[\lambda+1,\lambda+1][\lambda+2,\lambda+2]\ldots[p,p].$$

Imaginons alors que nous formulions, dans l'équation (6), toutes les variables y dont le caractère n'est pas un des caractères

$$(7)\quad \begin{cases} (1,2), & (2,3), & \ldots, & (\alpha,1), & (\alpha+1,\alpha+2), & \ldots, \\ (\beta,\alpha+1), & \ldots, & (\gamma+1,\gamma+1), & \ldots, & (\lambda,\lambda), \end{cases}$$

qui entrent dans l'expression (5) débarrassée de la puissance de ω qu'elle contient. Il est alors manifeste que P_1 se réduira à ω^p plus des termes tout à fait analogues à (5). *Il sera donc possible de trouver un nombre complexe du système Σ_1, somme de nombres appartenant aux caractères* (7) *et pour lequel l'équation caractéristique admettra au moins une racine différente de zéro.*

49. Partons maintenant, *a priori*, de l'hypothèse qui vient d'être exprimée. *Supposons donc que, pour un certain nombre u de la forme*

$$u = (e_{1,2} + e_{2,3} + \ldots + e_{\alpha-1,\alpha} + e_{\alpha,1}) + (e_{\alpha+1,\alpha+2} + \ldots + e_{\beta,\alpha+1}) + \ldots + \eta_{\gamma+1,\gamma+1} + \ldots + \eta_{\lambda,\lambda},$$

l'équation caractéristique admette une racine différente de zéro, les nombres $e_{i,j}$, $\eta_{i,i}$ étant des combinaisons linéaires des nombres pseudo-

nuls $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ *qui appartiennent respectivement aux caractères* (i, j), (i, i), *l'un des nombres* α, $\beta - \alpha, \ldots, \lambda - \gamma$ *étant plus grand que zéro.*

Il est évident que, dans ce cas, le système ne peut pas être de la première classe, car le nombre considéré, somme de nombres pseudo-nuls, n'est pas lui-même pseudo-nul.

L'hypothèse qui vient d'être énoncée exprime donc la condition nécessaire et suffisante pour que le système Σ *appartienne à la seconde classe.*

Le nombre u n'étant pas pseudo-nul, il existe un nombre v tel que l'on ait

$$uv = v, \tag{8}$$

en multipliant au besoin u par un facteur convenable. Regardons v comme une somme de nombres appartenant chacun à un caractère déterminé; de la forme de u et de la formule (8) résulte qu'aucun des premiers indices de ces caractères ne dépasse λ. Considérons, maintenant, ceux des termes de la somme v dont le caractère a $\gamma + 1$ pour premier indice; soit $v_{\gamma+1}$ la somme de ces termes; on a manifestement

$$\eta_{\gamma+1,\gamma+1}\, v_{\gamma+1} = v_{\gamma+1},$$

ce qui montre que $v_{\gamma+1}$ est nul, le nombre $\eta_{\nu+1,\gamma+1}$ étant pseudo-nul.

Les premiers indices des caractères des termes qui constituent la somme v ne dépassent donc pas γ. Supposons qu'il y ait effectivement dans cette somme un terme dont le caractère ait 1 pour premier indice. En appelant v' le nombre différent de zéro, formé des termes dont les caractères ont pour premiers indices les nombres $1, 2, \ldots, \alpha$, et en appelant de même u' le nombre

$$u' = e_{12} + e_{23} + \ldots + e_{\alpha,1},$$

on voit que

$$u'v' = v'.$$

Autrement dit, *on peut supposer que* u *est de la forme*

$$u = e_{12} + e_{23} + \ldots + e_{\alpha 1}.$$

50. Enlevons donc les accents de u' et de v'. Nous pourrons, d'après ce

qui précède, poser

$$v = \sum (v_{1i} + v_{2i} + \ldots + v_{\alpha i}),$$

un ou plusieurs des termes v_{ij} de caractère (i, j) pouvant être nuls.

La formule (8) devient alors

$$(9) \qquad e_{12} v_{2i} = v_{1i}, \quad e_{23} v_{3i} = v_{2i}, \quad \ldots, \quad e_{\alpha 1} v_{1i} = v_{\alpha i},$$

ce qui montre que si l'un des nombres $v_{1i}, v_{2i}, \ldots, v_{\alpha i}$, où l'on se donne l'indice i, est différent de zéro, il en est de même des autres, et nous pouvons dans l'expression de v ne conserver que ces termes $v_{1i}, v_{2i}, \ldots, v_{\alpha i}$.

Des formules (9) on déduit

$$(10) \qquad \begin{cases} e_{12} e_{23} \ldots e_{\alpha-1,\alpha} \quad e_{\alpha,1} \quad v_{1i} = v_{1i}, \\ e_{23} e_{34} \ldots e_{\alpha,1} \qquad e_{1,2} \quad v_{2i} = v_{2i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e_{\alpha 1} e_{12} \ldots e_{\alpha-2,\alpha-1} e_{\alpha-1,\alpha} v_{\alpha i} = v_{\alpha i}. \end{cases}$$

Comme les nombres qui multiplient $v_{1i}, v_{2i}, \ldots, v_{\alpha i}$ dans les premiers membres de ces équations sont respectivement de caractères (1, 1), (2, 2), ..., (α, α) *et ne sont pas pseudo-nuls*, on voit qu'on peut poser

$$(11) \qquad \begin{cases} e_{12} e_{23} \ldots e_{\alpha-1,\alpha} \quad e_{\alpha,1} \quad = e_1 + \zeta_1, \\ e_{23} e_{34} \ldots e_{\alpha,1} \qquad e_{1,2} \quad = e_2 + \zeta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e_{\alpha 1} e_{12} \ldots e_{\alpha-2,\alpha-1} e_{\alpha-1,\alpha} = e_\alpha + \zeta_\alpha, \end{cases}$$

$e_1, e_2, \ldots, e_\alpha$ désignant comme toujours les α premiers modules partiels et $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\alpha$ des nombres pseudo-nuls de caractères (1, 1), (2, 2), ..., (α, α).

51. *Je vais démontrer maintenant que, si* λ, μ *sont deux quelconques des indices* 1, 2, ..., α, *le nombre des unités* η *de caractère* (λ, μ) *est indépendant de ce caractère*, c'est-à-dire que tous les nombres $n_{\lambda,\mu}$ (ou $n_{\lambda\mu} + 1$) sont égaux pour λ, μ au plus égaux à α.

Faisons d'abord la convention d'introduire des nombres $e_{i,j}$ à indices supérieurs à α, à condition de ne pas les regarder comme distincts de ceux que nous avons introduits effectivement et qu'on obtient en prenant les résidus $(1, 2, \ldots, \alpha)$ de i et j par rapport à α. Considérons alors le

nombre

$$e_{i,j} = e_{i,i+1} e_{i+1,i+2} \ldots e_{j-1,j}, \tag{12}$$

déterminé sans ambiguïté lorsqu'on se donne les deux indices i, j quelconques parmi les indices $1, 2, \ldots, \alpha$. Je dis que le produit de e_{ij} par un nombre η de caractère (j, λ) ne peut pas être nul. Si, en effet, on avait

$$e_{ij}\eta = 0,$$

on en déduirait

$$e_{ji} e_{ij} \eta = 0.$$

Mais on a

$$e_{ji} e_{ij} = e_{j,j+1} e_{j+1,j+2} \ldots e_{j-1,j} = e_j + \zeta_j. \tag{13}$$

On aurait donc

$$0 = e_j \eta + \zeta_j \eta = \eta + \zeta_j \eta,$$

ce qui est impossible, le nombre ζ_j étant pseudo-nul.

Il résulte de là que, les produits $e_{i,j}\eta$ étant de caractère (i, λ) si η est de caractère (j, λ), il y a au moins autant de nombres indépendants de caractère (i, λ) que de caractère (j, λ). Comme rien ne distingue i et j, *on peut dire qu'il y a le même nombre de nombres complexes indépendants de caractère* (i, λ) *que de caractère* (j, λ), *et que les premiers peuvent être obtenus en multipliant* e_{ij} *par les derniers.*

On démontrerait d'une façon analogue qu'il y a autant de nombres complexes indépendants de caractère (λ, i) *que de caractère* (λ, j), *et que les derniers s'obtiennent en multipliant les premiers par* $e_{i,j}$.

Dans ces énoncés λ est l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, h$.

52. Il résulte immédiatement de là qu'il existe un nombre $e'_{\alpha 1}$ de caractère $(\alpha, 1)$ tel que le produit $e_{1\alpha} e'_{\alpha 1}$ soit un nombre donné de caractère $(1, 1)$, *par exemple* e_1. Il existe donc α nombres $e_{12}, e_{23}, \ldots, e_{\alpha-1,\alpha}, e'_{\alpha 1}$ tels que

$$e_{12} e_{23} \ldots e_{\alpha-1,\alpha} e'_{\alpha,1} = e_1. \tag{14}$$

On aura alors, évidemment, des égalités telles que la suivante

$$e_{i,i+1} \ldots e_{\alpha-1,\alpha} e'_{\alpha,1} e_{1,2} \ldots e_{i-1,i} = a e_i + \zeta'_i,$$

a étant une constante ordinaire et ζ'_i étant un nombre pseudo-nul de carac-

tère (i, i) pouvant être nul. Les deux membres de cette égalité, multipliés à gauche par $e_{1i} = e_{12} \ldots e_{i-1,i}$, donnent

$$(e_{12} \ldots e'_{\alpha 1}) e_{12} \ldots e_{i-1,i} = e_{1i} = a e_{1i} e_i + e_{1i} \zeta'_i = a e_{1i} + e_{1i} \zeta'_i,$$

ou

$$(1 - a) e_{1i} = e_{1i} \zeta'_i.$$

Cette égalité n'est possible que si a est égal à 1 et ζ'_i nul. On a donc

$$e_{i,i+1} \ldots e_{\alpha-1,\alpha} e'_{\alpha,1} e_{1,2} \ldots e_{i-1,i} = e_i. \tag{15}$$

53. *Nous sommes donc finalement arrivés à démontrer l'existence de α nombres complexes $e_{12}, e_{23}, \ldots, e_{\alpha 1}$* (que nous pouvons écrire, maintenant, ainsi à la place de $e'_{\alpha 1}$) *satisfaisant aux égalités*

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_{12} e_{23} \ldots e_{\alpha-1,\alpha} \quad e_{\alpha 1} & = e_{11}, \\ e_{23} e_{34} \ldots e_{\alpha,1} \quad e_{12} & = e_{22}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ e_{\alpha 1} e_{12} \ldots e_{\alpha-2,\alpha-1} e_{\alpha-1,\alpha} & = e_{\alpha\alpha}, \end{array} \right. \tag{16}$$

les nombres $e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{\alpha\alpha}$ étant mis maintenant pour $e_1, e_2, \ldots, e_\alpha$. De plus, en posant comme tout à l'heure

$$e_{ij} = e_{i,i+1} e_{i+1,i+2} \ldots e_{j-1,j}, \tag{16}$$

on a les relations

$$e_{ij} e_{ji} = e_{ii}, \tag{17}$$

puis, comme on le démontre facilement,

$$e_{ij} e_{jl} = e_{il}, \tag{18}$$

formule dans laquelle rentrent la formule (17) et même les formules (16) et (15).

Nous avons donc trouvé α^2 nombres e_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, \alpha)$ de caractère (i, j) satisfaisant à la loi de multiplication

$$e_{ij} e_{jl} = e_{il} \qquad (i, j, l = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

De plus, les produits de e_{ij} par l'ensemble des nombres de caractère (j, λ), où λ est quelconque, donnent tous les nombres de caractère

(i, λ); *de même, les produits par* e_{ij} *de l'ensemble des nombres de caractère* (λ, i) *donnent tous les nombres de caractère* (λ, j).

54. En particulier, si nous nous bornons aux indices 1 et 2, nous voyons que *le système donné contient quatre unités* $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$, *formant elles-mêmes un système, la loi de multiplication de ce système étant la suivante*

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il} \qquad (i, j, l = 1, 2).$$

Un tel système de quatre unités s'appelle un QUATERNION.

L'équation caractéristique d'un quaternion est facile à former. En désignant par

$$x_{11}e_{11} + x_{12}e_{12} + x_{21}e_{21} + x_{22}e_{22}$$

un nombre quelconque du système, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} - \omega & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} - \omega \end{vmatrix}^2.$$

Il en résulte qu'un quaternion est un système de la seconde classe, le déterminant du second membre étant irréductible.

Par suite, aucun système de première classe ne peut contenir de quaternion, car tout système contenu dans un système de première classe est nécessairement aussi de première classe. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui a été vérifié par M. Scheffers pour $r < 9$:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit de seconde classe est qu'il contienne un système de quatre unités, formant un quaternion.

C'est pour cette raison que M. Scheffers a appelé les systèmes de la seconde classe *systèmes à quaternions* (*Quaternionsystem*) et ceux de la première classe *systèmes sans quaternions* (*Nichtquaternionsystem*).

55. Nous pouvons encore exprimer, d'une autre façon, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système appartienne à la seconde classe. Remarquons, en effet, qu'on a

$$(e_{12} + e_{21})(e_{11} + e_{21}) = e_{11} + e_{21}.$$

Par suite, le nombre $e_{12} + e_{21}$, somme de deux nombres appartenant aux caractères (1, 2), (2, 1), n'est pas pseudo-nul. Il est bien clair que si le

système appartenait à la première classe ce fait ne pourrait pas se présenter, la somme de deux nombres pseudo-nuls étant pseudo-nulle.

Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système appartienne à la seconde classe est qu'il existe un nombre, somme de deux nombres appartenant respectivement aux caractères* (α, β), (β, α), *et qui ne soit pas pseudo-nul, ou encore qu'il existe deux nombres de caractères* (α, β), (β, α) *dont le produit donne le module partiel* e_α.

56. Cela étant, la série des indices $(1, 2, \ldots, h)$ se partage en un certain nombre d'autres séries telles que $(1, 2, \ldots, p)$, $(p+1, \ldots, q)$, $\ldots$, jouissant des propriétés suivantes. On peut passer d'un indice quelconque d'une de ces séries à un autre indice quelconque β de la même série par l'intermédiaire d'un certain nombre d'autres indices de la même série, soient γ, δ, $\ldots$, λ, de telle sorte qu'il existe un nombre non pseudo-nul de la forme $\eta_{\alpha\gamma} + \eta_{\gamma\alpha}$, un nombre non pseudo-nul de la forme $\eta_{\gamma\delta} + \eta_{\delta\gamma}$, $\ldots$, un nombre non pseudo-nul de la forme $\eta_{\lambda\beta} + \eta_{\beta\lambda}$, en désignant par η_{ij} un nombre de caractère (i, j). De plus, si λ, μ sont deux indices quelconques appartenant à deux séries différentes, il n'existe aucun nombre non pseudo-nul de la forme $\eta_{\lambda\mu} + \eta_{\mu\lambda}$.

On déduit facilement de là qu'on peut supposer choisis les indices $(1, 2, \ldots, p)$ de la première série, par exemple, de telle façon qu'il y ait $p - 1$ nombres non pseudo-nuls de la forme

$$\eta_{12} + \eta_{21}, \quad \eta_{23} + \eta_{32}, \quad \ldots, \quad \eta_{p-1,p} + \eta_{p.p-1}.$$

En répétant alors le raisonnement fait (49-53), nous verrons qu'il existe $2(p-1)$ nombres e_{12}, e_{21}, e_{23}, e_{32}, $\ldots$, $e_{p-1,p}$, $e_{p,p-1}$ tels que l'on ait

$$(19) \qquad \begin{cases} e_{12}e_{21} = e_{11}, & e_{23}e_{32} = e_{22}, & \ldots, & e_{p-1,p}e_{p,p-1} = e_{p-1,p-1}, \\ e_{21}e_{12} = e_{22}, & e_{32}e_{23} = e^{3}_{3}, & \ldots, & e_{p,p-1}e_{p-1,p} = e_{p,p}. \end{cases}$$

Posons alors

$$(20) \qquad \begin{cases} e_{i,i+j} = e_{i,i+1}\, e_{i+1,i+2} \ldots e_{i+j-1,i+j}, \\ e_{i+j,i} = e_{i+j,i+j-1}\, e_{i+j-1,i+j-2} \ldots e_{i+1,i}. \end{cases}$$

Nous démontrerons facilement que i, j, l, λ désignant quatre quelconques des indices $1, 2, \ldots, p$, on a

$$(21) \qquad e_{ij}e_{jl} = e_{il}, \qquad e_{ij}e_{\lambda l} = 0 \qquad (j \neq \lambda).$$

57. Nous pouvons ajouter (51) qu'*on obtient l'ensemble des nombres de caractère* (i, λ) *en multipliant* e_{ij} *par l'ensemble des nombres de caractère* (j, λ), λ *étant quelconque*, i *et* j *étant au plus égaux à* p. *De même, on obtient l'ensemble des nombres de caractère* (λ, i) *en multipliant par* e_{ji} *l'ensemble des nombres de caractère* (λ, j).

D'après cela, si nous désignons par η, η', ..., les unités pseudo-nulles de caractère $(1, 1)$, nous pourrons prendre pour unités de caractère (i, j) les nombres

$$e_{i1}\eta e_{1j}, \quad e_{i1}\eta' e_{1j}, \quad \ldots,$$

le nombre $e_{i1}e_{11}e_{1j}$ se réduisant lui-même à e_{ij}. Si nous affectons les unités η, η', ... du double indice inférieur $(1, 1)$ de leur caractère, nous pourrons poser

$$(22) \qquad \eta_{ij} = e_{i1}\eta_{11}e_{1j}, \qquad \eta'_{ij} = e_{i1}\eta'_{11}e_{1j}, \qquad \ldots.$$

De même, si λ est supérieur à p et si nous nous donnons les unités de caractère $(1, \lambda)$, nous en déduirons celles de caractère (i, λ)

$$(23) \qquad \eta_{i\lambda} = e_{i1}\eta_{1\lambda}, \qquad \eta'_{i\lambda} = e_{i1}\eta'_{1\lambda}, \qquad \ldots,$$

et de même si nous nous donnons les unités de caractère $(\lambda, 1)$

$$(24) \qquad \eta_{\lambda i} = \eta_{\lambda 1}e_{1i}, \qquad \eta'_{\lambda i} = \eta'_{\lambda 1}e_{1i}, \qquad \ldots.$$

58. Considérons alors le système formé des unités appartenant aux caractères $(1, 1)$, $(1, \lambda)$, $(\lambda, 1)$, (λ, μ), où λ et μ sont plus grands que p. Il est facile de déduire de la loi de multiplication de ce système la loi de multiplication du système total. Prenons d'abord le produit de deux nombres de caractère $(1, 1)$. Soit

$$(25) \qquad \eta_{11}^{(\rho)}\eta_{11}^{(\sigma)} = \sum \alpha_{\rho\sigma\tau}\eta_{11}^{(\tau)};$$

on en déduit

$$(e_{i1}\eta_{11}^{(\rho)}e_{1j})(e_{j1}\eta_{11}^{(\sigma)}e_{1l}) = \sum \alpha_{\rho\sigma\tau}e_{i1}\eta_{11}^{(\tau)}e_{1l},$$

ou

$$(26) \qquad \eta_{ij}^{(\rho)}\eta_{jl}^{(\sigma)} = \sum \alpha_{\rho\sigma\tau}\eta_{il}^{(\tau)},$$

et cette formule s'applique encore au cas où l'un des nombres $\eta_{11}^{(\rho)}$, $\eta_{11}^{(\sigma)}$ est le module partiel e_{11}.

Partons maintenant de

$$\eta_{11}^{(\rho)}\eta_{1\lambda}^{(\sigma)} = \sum \beta_{\rho\sigma\tau}\eta_{1\lambda}^{(\tau)};$$

on en déduit, comme tout à l'heure,

$$\eta_{ij}^{(\rho)}\eta_{j\lambda}^{(\sigma)} = \sum \beta_{\rho\sigma\tau}\eta_{i\lambda}^{(\tau)}, \tag{27}$$

les constantes $\beta_{\rho\sigma\tau}$ ne dépendant pas des indices i et j; de même

$$\eta_{\lambda i}^{(\rho)}\eta_{ij}^{(\sigma)} = \sum \gamma_{\rho\sigma\tau}\eta_{\lambda j}^{(\tau)}, \tag{28}$$

les constantes γ ne dépendant pas des indices i et j.

59. Si nous procédons de la même façon pour la seconde série $(p+1, p+2, \ldots, q)$, et pour la troisième et ainsi de suite, nous verrons qu'il suffira de considérer le système des nombres complexes formé des nombres de caractères $(1, 1)$, $(1, p+1)$, $(1, q+1)$, $\ldots$, $(p+1, 1)$, $\ldots$, et que de la loi de multiplication de ce système on déduira celle du système total.

Mais *ce système partiel est de première classe;* car, par hypothèse, il n'existe aucun nombre non pseudo-nul de la forme $\eta_{1,p+1} + \eta_{p+1,1}$ ou d'une forme analogue.

Donc, on peut déduire un système quelconque Σ *de deuxième classe d'un sytème* Σ' *de première classe.*

60. Pour définir d'une façon précise cette correspondance, *supposons que nous ayons mis le système* Σ' *de première classe sous la forme canonique indiquée au n° 38. Soient*

$$E^{(1)}, \quad E^{(2)}, \quad \ldots, \quad E^{(H)}$$

les modules partiels de ce système, et soient

$$H^{(1)}, \quad H^{(2)}, \quad \ldots, \quad H^{(K)}$$

les unités pseudo-nulles, dont chacune appartient à un caractère déterminé. Nous faisons correspondre à chaque module partiel $E^{(i)}$ *un système de* p_i^2 *unités* $e_{\alpha\beta}^{(i)}$, *où* α *et* β *prennent toutes les valeurs* $1, 2, \ldots, p_i$. *Nous faisons maintenant correspondre à chaque unité* $H^{(\rho)}$ *de caractère*

(i,j), $p_i p_j$ unités $\eta^{(\rho)}_{\alpha\beta}$, où α prend toutes les valeurs 1, 2, ..., p_i et β toutes les valeurs 1, 2, ..., p_j.

Cela étant, les formules qui donnent la loi de multiplication du premier système sont

$$(29)\qquad (E^{(i)})^2 = E^{(i)},\qquad E^{(i)}H^{(\rho)} = H^{(\rho)}E^{(j)} = H^{(\rho)},\qquad H^{(\rho)}H^{(\sigma)} = \sum \alpha_{\rho\sigma\tau} H^{(\tau)},$$

en supposant que dans la seconde formule $H^{(\rho)}$ soit de caractère $(i,j)(\tau > \rho, \tau > \sigma)$, et que, dans la troisième, le second indice du caractère (i,j) de $H^{(\rho)}$ soit égal au premier indice du caractère (j,k) de $H^{(\sigma)}$ et tous les $H^{(\tau)}$ qui entrent dans le second membre étant de caractère (i,l).

A la première formule correspondront les formules

$$(30)\qquad e^{(i)}_{\alpha\beta} e^{(i)}_{\beta\gamma} = e^{(i)}_{\alpha\gamma}\qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p_i);$$

à la seconde, les formules

$$(31)\qquad e^{(i)}_{\alpha\beta}\eta^{(\rho)}_{\beta\gamma} = \eta^{(\rho)}_{\alpha\gamma},\qquad \eta^{(\rho)}_{\beta\gamma} e^{(j)}_{\gamma\delta} = \eta^{(\rho)}_{\beta\delta}\qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p_i;\ \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, p_j).$$

Enfin, à la dernière, correspondront les formules

$$(32)\qquad \eta^{(\rho)}_{\alpha\beta}\eta^{(\sigma)}_{\beta\gamma} = \sum_{\tau} \alpha_{\rho\sigma\tau}\eta^{(\tau)}_{\alpha\gamma}\qquad \begin{pmatrix} \tau > \rho,\ \tau > \sigma;\ \alpha = 1, 2, \ldots, p_i;\ \beta = 1, 2, \ldots, p_j; \\ \gamma = 1, 2, \ldots, p_l \end{pmatrix}.$$

Tous les produits non écrits sont nuls.

On peut encore énoncer ce théorème sous la forme suivante, plus intuitive :

Tout système de la deuxième classe peut se déduire d'un système de la première classe mis sous forme canonique

$$E^{(1)},\ E^{(2)}\ \ldots,\ E^{(h)};\qquad H^{(1)},\ H^{(2)},\ \ldots,\ H^{(k)},$$

en regardant les coefficients des unités de ce système, non comme des nombres ordinaires, mais comme des nombres de la forme

$$\sum x_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta},$$

les $\varepsilon_{\alpha\beta}$ étant des symboles où les indices α et β prennent respectivement les valeurs $(1, 2, \ldots, p_i)$, $(1, 2, \ldots, p_j)$, si (i,j) est le caractère de

l'unité correspondante; ces symboles étant assujettis de plus à la loi de multiplication

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}=\varepsilon_{\alpha\gamma}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}=0 \qquad (\beta\neq\gamma).$$

Cela revient à faire correspondre à l'unité $H^{(\rho)}$ *de caractère* (i,j) *les* $p_i p_j$ *unités*

$$\varepsilon_{\alpha\beta}H^{(\rho)}=H^{(\rho)}\varepsilon_{\alpha\beta}$$
$$(\alpha=1, 2, \ldots, p_i; \beta=1, 2, \ldots, p_j).$$

Si l'on désigne par N_{ij} le nombre des unités H de caractère (i,j), on voit que l'ordre du système total est

$$r=p_1^2+p_2^2+\ldots+p_H^2+\sum_{i,j}N_{ij}p_ip_j.$$

Naturellement, un ou plusieurs des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_H$ peuvent être égaux à l'unité.

61. Nous voyons qu'à chacun $E^{(i)}$ des modules partiels $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(H)}$ correspond un système de p_i^2 unités $e_{\alpha\beta}^{(i)}$, dont la loi de multiplication est donnée par la formule (30). Ces systèmes remarquables sont la généralisation des quaternions; dans le cas de $p=3$, ils ont été appelés *nonions* par M. Sylvester, on pourrait donc les appeler *p^2-ions*.

Tout p^2-ion contient un q^2-ion si q est inférieur à p; il suffit, en effet, de ne prendre que les unités $e_{\alpha\beta}$ pour lesquels α et β ne dépassent pas q. En particulier, tout p^2-ion contient un quaternion.

On pourrait aussi considérer le cas où p est égal à 1, et alors on aurait un système d'une seule unité e égale à son carré.

62. Considérons un p^2-ion et calculons son équation caractéristique. Désignons par

$$\sum x_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$$

un nombre quelconque du p^2-ion. En rangeant les unités dans l'ordre suivant :

(33) $\qquad e_{11}, \quad e_{21}, \quad \ldots, \quad e_{p1}, \quad e_{12}, \quad e_{22}, \quad \ldots, \quad e_{p2}, \quad \ldots, \quad e_{p-1,p}, \quad e_{p,p},$

nous savons (44) que le déterminant Δ se décompose en un produit de p

déterminants partiels qui sont tous ici d'ordre p. En désignant par

$$z_1\zeta_1 + \ldots + z_{p^2}\zeta_{p^2}$$

le nombre considéré, où les ζ sont les unités rangées dans l'ordre (33), le déterminant Δ_1 est ici

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum z_i\alpha_{i11} - \omega & \sum z_i\alpha_{i21} & \ldots & \sum z_i\alpha_{ip1} \\ \sum z_i\alpha_{i12} & \sum z_i\alpha_{i22} - \omega & \ldots & \sum z_i\alpha_{ip2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum z_i\alpha_{i1p} & \sum z_i\alpha_{i2p} & \ldots & \sum z_i\alpha_{ipp} - \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} - \omega & x_{12} & \ldots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} - \omega & \ldots & x_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{p1} & x_{p2} & \ldots & x_{pp} - \omega \end{vmatrix}.$$

Les autres déterminants $\Delta_2, \ldots, \Delta_p$ sont les mêmes et, par suite, Δ est la $p^{\text{ième}}$ puissance du déterminant Δ_1

$$(34) \qquad \Delta = |\, x_{ij} - \varepsilon_{ij}\omega \,|^p.$$

En considérant la seconde équation caractéristique, on trouve pour le premier nombre Δ' la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un déterminant Δ'_1 qui se déduit de Δ_1 en échangeant les lignes et les colonnes; on a donc aussi

$$\Delta' = |\, x_{ij} - \varepsilon_{ij}\omega \,|^p.$$

63. L'équation obtenue en égalant à zéro le terme indépendant de ω de l'équation caractéristique exprime naturellement que le produit du nombre considéré x par un nombre convenablement choisi peut être nul; de même pour la seconde équation caractéristique.

Donc, étant donné un p^2-ion, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre $x = \sum x_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$ puisse donner zéro par multiplication à droite ou à gauche avec un autre nombre est que le déterminant des $x_{\alpha\beta}$ soit nul.

64. Revenons à un système quelconque et cherchons à déterminer le premier membre Δ de son équation caractéristique. Nous avons vu qu'étant donné un système de première classe mis sous sa forme canonique (38), on pouvait ranger les unités de ce système dans un ordre tel que tous les élé-

ments du déterminant caractéristique en haut et à droite de la diagonale principale fussent nuls, les éléments de la diagonale principale se réduisant chacun à l'une des quantités $x_1 - \omega, x_2 - \omega, \ldots, x_h - \omega$. Supposons les unités E et H de Σ' rangées dans cet ordre. Nous rangerons alors les unités de Σ dans un ordre tel que toutes les unités que nous avons fait correspondre à $\mathrm{H}^{(\rho)}$ par exemple de caractère (i, j) se suivent de la façon suivante :

$$\eta^{(\rho)}_{11}, \quad \eta^{(\rho)}_{21}, \quad \ldots, \quad \eta^{(\rho)}_{p_i 1}, \quad \eta^{(\rho)}_{12}, \quad \eta^{(\rho)}_{22}, \quad \eta^{(\rho)}_{p_i \lambda}, \quad \ldots, \quad \eta^{(\rho)}_{p_i p_j}.$$

De cette façon, nous remplaçons l'élément de la $\mu^{\text{ième}}$ ligne et de la $\nu^{\text{ième}}$ colonne du déterminant de Σ' par un tableau rectangulaire de $p_\alpha p_\beta$ lignes et de $p_\gamma p_\delta$ colonnes, si (α, β) est le caractère de la $\mu^{\text{ième}}$ et (γ, δ) celui de la $\nu^{\text{ième}}$ unité de Σ'.

Le déterminant caractéristique de Σ' se réduisant aux produits des éléments de la diagonale principale, le déterminant principal de Σ se réduira au produit des déterminants constitués par les tableaux carrés que nous avons substitués à ces éléments.

Prenons, par exemple, l'élément qui pour Σ' était à la $\lambda^{\text{ième}}$ ligne et à la $\lambda^{\text{ième}}$ colonne ; soit (i, j) le caractère de la $\lambda^{\text{ième}}$ unité de Σ'. Nous lui substituons un tableau carré de $p_i p_j$ lignes et $p_i p_j$ colonnes. Il est facile de voir que ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} x^{(i)}_{11} - \omega & x^{(i)}_{12} & \ldots & x^{(i)}_{1p_i} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x^{(i)}_{21} & x^{(i)}_{22} - \omega & \ldots & x^{(i)}_{2p_i} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ x^{(i)}_{p_i 1} & x^{(i)}_{p_i 2} & \ldots & x^{(i)}_{p_i p_i} - \omega & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x^{(i)}_{11} - \omega & x^{(i)}_{12} & \ldots & x^{(i)}_{1p_i} & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & x^{(i)}_{p_i p_i} - \omega \end{vmatrix} = \Delta_i^{p_j},$$

en posant

$$(35) \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} x^{(i)}_{11} - \omega & x^{(i)}_{12} & \ldots & x^{(i)}_{1p_i} \\ x^{(i)}_{21} & x^{(i)}_{22} - \omega & \ldots & x^{(i)}_{2p_i} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(i)}_{p_i 1} & x^{(i)}_{p_i 2} & \ldots & x^{(i)}_{p_i p_i} - \omega \end{vmatrix}.$$

Il résulte finalement de là que l'on a

$$(36) \qquad \Delta = \Delta_1^{p_1 + \mathrm{N}_{11} p_1 + \mathrm{N}_{12} p_2 + \ldots + \mathrm{N}_{1\mathrm{H}} p_\mathrm{H}} \Delta_2^{p_2 + \mathrm{N}_{21} p_1 + \mathrm{N}_{22} p_2 + \ldots + \mathrm{N}_{2\mathrm{H}} p_\mathrm{H}} \ldots \Delta_\mathrm{H}^{p_\mathrm{H} + \mathrm{N}_{\mathrm{H}1} p_1 + \ldots + \mathrm{N}_{\mathrm{HH}} p_\mathrm{H}}.$$

65. En considérant la seconde équation caractéristique, on aurait de même

$$\Delta' = \Delta_1^{p_1+N_{11}p_1+\ldots+N_{H1}p_H}\Delta_2^{p_2+N_{12}p_1+\ldots+N_{H2}p_H}\ldots\Delta_H^{p_H+N_{1H}p_1+\ldots+N_{HH}p_H}. \tag{37}$$

Les nombres entiers N ont la signification indiquée plus haut, N_{ij} étant le nombre des unités H de Σ' qui sont de caractère (i, j).

On voit que les facteurs irréductibles qui entrent dans Δ et Δ' sont les mêmes et qu'ils peuvent être mis sous la forme de H déterminants tels que Δ_i (formule 35).

Nous pouvons énoncer ce résultat sous la forme suivante :

Étant donné un système de la seconde classe, les facteurs irréductibles qui entrent dans les deux déterminants caractéristiques de ce système sont les mêmes, aux degrés de multiplicité près. Si ces facteurs irréductibles sont au nombre de H *et sont respectivement de degrés* $p_1, p_2, \ldots, p_H$, *on peut trouver dans le système donné* H *systèmes respectivement de* $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_H^2$ *unités, toutes indépendantes entre elles, soit*

$$\begin{array}{ll} e_{ij}^{(1)} & (i, j = 1, 2, \ldots, p_1), \\ e_{ij}^{(2)} & (i, j = 1, 2, \ldots, p_2), \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{ij}^{(H)} & (i, j = 1, 2, \ldots, p_H); \end{array}$$

tels que chacun de ces systèmes soit un p^2*-ion. De plus, on peut choisir* $r - p_1^2 - p_2^2 - \ldots - p_H^2$ *autres unités indépendantes* $\eta_1, \eta_2, \ldots$, *telles que si on désigne par*

$$\sum x_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(1)} + \sum x_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(2)} + \ldots + y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \ldots$$

un nombre quelconque du système les H *facteurs irréductibles qui entrent dans chacun des déterminants caractéristiques soient les* H *déterminants* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_H$ *dont le premier, par exemple, est formé des éléments* $x_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}\omega$ ($\varepsilon_{ij} = 1$ *si* $i = j$, $\varepsilon_{ij} = 0$ *si* $i \neq j$)

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} x_{11}^{(\alpha)} - \omega & x_{12}^{(\alpha)} & \ldots & x_{1p_\alpha}^{(\alpha)} \\ x_{21}^{(\alpha)} & x_{22}^{(\alpha)} - \omega & \ldots & x_{2p_\alpha}^{(\alpha)} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ x_{p_\alpha 1}^{(\alpha)} & x_{p_\alpha 2}^{(\alpha)} & \ldots & x_{p_\alpha p_\alpha}^{(\alpha)} - \omega \end{vmatrix}.$$

66. *On voit immédiatement par là, en faisant ω égal à zéro, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'une ou l'autre des divisions par un nombre soit possible est qu'aucun des déterminants $\Delta^{(0)}$ des $x_{ij}^{(\alpha)}$ ne soit nul.*

Si l'on appelle *diviseur de zéro* un nombre qui peut être multiplié à droite ou à gauche par un nombre convenablement choisi de façon à donner un produit nul, nous voyons que *tous les diviseurs de zéro s'obtiennent par l'équation*

$$\Delta_1^0 \Delta_2^0 \dots \Delta_H^0 = 0,$$

c'est-à-dire en égalant à zéro un ou plusieurs des déterminants de $x_{ij}^{(\alpha)}$.

67. Quelle que soit la façon dont on fasse la réduction canonique (60) d'un système de deuxième classe, l'ensemble des nombres

$$\eta_1 = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \dots$$

reste toujours le même. On peut en effet obtenir cet ensemble en égalant à zéro tous les éléments de tous les déterminants facteurs irréductibles du premier membre de l'équation caractéristique; et il est clair que le système d'équations linéaires obtenu est indépendant des unités dont on part.

De même le p_1^2-ion e_{ij}^1 est déterminé à des nombres η_i près, car l'ensemble des nombres qui se déduisent des unités de ce p_1^2-ion et des unités η_i peut être obtenu en égalant à zéro tous les éléments des $H-1$ derniers déterminants facteurs irréductibles du premier membre de l'équation caractéristique.

Il y a plus. Supposons qu'on ait déterminé en premier lieu p_1 nombres $\bar{e}_{11}^1, \bar{e}_{22}^1, \dots, \bar{e}_{p_1 p_1}^1$ se déduisant linéairement des unités du premier p_1^2-ion et des unités η_i; en second lieu p_2 nombres $\bar{e}_{11}^2, \dots, \bar{e}_{p_2 p_2}^2$ se déduisant linéairement des unités du second p_2^2-ion et des unités η_i, et ainsi de suite, de telle façon enfin que chacun de ces $p_1 + p_2 + \dots + p_H$ nombres soit égal à son propre carré et que le produit de deux quelconques d'entre eux soit nul. Il en résultera que dans la première réduction (20) que nous avons fait subir au système, nous pouvons prendre ces nombres pour modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$. Par suite, nous pourrons déterminer un p_1^2-ion dont les éléments diagonaux seront p_1 des nombres précédents et seront, par suite, nécessairement $\bar{e}_{11}^1, \dots, \bar{e}_{p_1 p_1}^1$; de même un p_2^2-ion dont les éléments diagonaux seront $\bar{e}_{11}^2, \dots, \bar{e}_{p_2 p_2}^2$; et ainsi de suite.

En se reportant à la façon dont nous avons déterminé les p^2 — ions du système, nous verrons même qu'on peut prendre pour $\bar{\varepsilon}_{12}^{(1)}, \ldots, \bar{\varepsilon}_{1p_1}^{(1)}$ des nombres arbitraires ne se déduisant pas linéairement des η et appartenant respectivement aux caractères $(1, 2), \ldots, (1, p_1)$ par rapport aux modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p_1}$.

Enfin, *il résulte de là qu'un nombre complexe arbitraire peut toujours, par un choix convenable des unités, être supposé de la forme*

$$\lambda_1^{(1)} e_{11}^{(1)} + \ldots + \lambda_{p_1}^{(1)} e_{p_1 p_1}^{(1)} + \lambda_1^{(2)} e_{11}^{(2)} + \ldots + \lambda_{p_H}^{(H)} e_{p_H p_H}^{(H)} + \eta. \tag{31}$$

68. Nous allons maintenant introduire quelques définitions qui permettront d'énoncer tous les résultats trouvés jusqu'ici sous des formes simples.

On dit qu'un système Σ de nombres complexes se décompose en deux systèmes Σ_1 et Σ_2 lorsque tout nombre de Σ_1 et tout nombre de Σ_2, de même que la somme d'un nombre quelconque de Σ_1 et d'un nombre quelconque de Σ_2 font partie de Σ; lorsque, de plus, réciproquement, tout nombre de Σ est, d'une manière et d'une seule, la somme d'un nombre de Σ_1 et d'un nombre de Σ_2; lorsque enfin le produit d'un nombre quelconque de Σ_1 et d'un nombre quelconque de Σ_2 est nul.

Bien entendu cette définition suppose que Σ_1 et Σ_2 n'ont aucun nombre commun.

69. *On dit qu'un système Σ admet un sous-système invariant σ, lorsque tout nombre de σ fait partie de Σ et que le produit, à droite ou à gauche, d'un nombre quelconque de σ par un nombre quelconque de Σ fait encore partie de σ.*

Cette définition peut encore être étendue aux systèmes σ qui satisfont à toutes les propriétés des systèmes ordinaires, sauf celle d'avoir un module, c'est-à-dire sauf la possibilité des deux divisions. Par exemple, nous conviendrons de l'étendre aux systèmes σ de nombres pseudo-nuls, étudiés aux n°s 29 et suiv. Nous appellerons, pour abréger, ces derniers systèmes *pseudo-nuls*. Un système pseudo-nul n'est donc pas, au sens propre du terme, un système de nombres complexes.

Un système Σ qui n'admet pas de sous-système invariant est dit simple. *Un système qui se décompose en deux ou plusieurs systèmes simples est dit* semi-simple.

70. Si l'on se reporte aux résultats établis précédemment, on voit que les systèmes simples ne doivent pas contenir d'unités η; car le système pseudo-nul formé des unités que nous avons appelées η est manifestement invariant.

Il en résulte qu'un système simple ne peut qu'être formé d'un certain nombre de p^2 — ions, p pouvant avoir la valeur 1. Mais il est bien clair que le sous-système obtenu en prenant un de ces p^2 — ions, s'il y en a plusieurs, est invariant dans le système total. Il faut donc que le système se réduise lui-même à un p^2 — ion.

Réciproquement, prenons un p^2 — ion formé des p^2 unités e_{ij}. Ce système est simple; car si un nombre

$$x = \sum x_{ij} e_{ij}$$

de ce système fait partie d'un sous-groupe invariant, il en sera de même de $e_{\alpha i} x e_{j\beta} = x_{ij} e_{\alpha\beta}$. Par suite, si l'un des coefficients x_{ij} est différent de zéro, le sous-système invariant contient toutes les unités $e_{\alpha\beta}$, et par suite se confond avec le système total.

71. D'après cela, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Tous les systèmes simples de nombres complexes rentrent dans le même type; ils sont formés de p^2 unités e_{ij}, où i et j prennent toutes les valeurs 1, 2, ..., p *et la loi de multiplication de ces unités est donnée par les formules*

$$e_{ij} e_{jl} = e_{il}, \qquad e_{ij} e_{\lambda l} = 0 \; (j \neq \lambda).$$

Le nombre p est un nombre entier quelconque supérieur ou égal à 1. *Ces systèmes s'appellent p^2 — ions.*

Il résulte de là que *les systèmes semi-simples sont formés par la composition de plusieurs p^2 — ions.*

72. En comparant ce résultat avec ceux trouvés pour la représentation canonique des systèmes de première et deuxième classe, nous trouvons le théorème suivant :

Tout système de nombres complexes est formé d'un sous-système simple ou semi-simple Σ_1 et d'un sous-système invariant pseudo-nul σ.

De plus, la nature du sous-système semi-simple est parfaitement déterminée.

Considérons un des facteurs irréductibles qui entrent dans le déterminant caractéristique; il est égal à

$$\begin{vmatrix} x_{11}-\omega & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22}-\omega & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pp}-\omega \end{vmatrix},$$

si l'on appelle $\sum x_{ij}e_{ij}$ le nombre le plus général du sous-système simple correspondant. Si nous développons ce déterminant suivant les puissances de ω nous trouvons, au signe près,

$$\omega^p - \sum x_{ii}\omega^{p-1} + \sum (x_{ii}x_{jj} - x_{ij}x_{ji})\,\omega^{p-2} + \dots.$$

Si ce déterminant entre avec l'exposant q, il donne un facteur de la forme

$$\omega^{pq} - q\sum x_{ii}\omega^{pq-1} + \left[q\sum (x_{ii}x_{jj} - x_{ij}x_{ji}) + \frac{q(q-1)}{2}\left(\sum x_{ii}\right)^2\right]\omega^{pq-2} + \dots.$$

Il en résulte que le déterminant caractéristique total est égal à

$$\begin{aligned} &\omega^r - \mathrm{S}\left(q\sum x_{ii}\right)\omega^{r-1} \\ &\quad + \mathrm{S}\left[q\sum (x_{ii}x_{jj} - x_{ij}x_{ji}) + \frac{q(q-1)}{2}\left(\sum x_{ii}\right)^2 + qq'\sum x_{ii}\sum x'_{ii}\right]\omega^{r-2} + \dots. \end{aligned}$$

Si nous appelons $\psi(x)$ le coefficient de ω^{r-2}, et que nous prenions les dérivées de cette forme quadratique, nous trouvons par exemple

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x_{11}} &= q\left[\mathrm{S}\left(q\sum x_{ii}\right) - x_{11}\right], \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_{12}} &= -\,q x_{21}. \end{aligned}$$

Il en résulte que le système d'équations

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial\psi}{\partial x'_{ij}} = \dots = 0$$

est équivalent au système

$$x_{ij} = x'_{ij} = \ldots = 0,$$

c'est-à-dire détermine le plus grand sous-système invariant pseudo-nul.

73. *D'après cela le plus grand sous-système invariant pseudo-nul d'un système de nombres complexes $x_1 e_1 + \ldots + x_r e_r$ à r unités indépendantes $e_1, e_2, \ldots, e_r$ s'obtient par les équations linéaires*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial \psi}{\partial x_r} = 0,$$

en désignant par ψ la forme quadratique coefficient de ω^{r-2} dans le premier membre de l'équation caractéristique du sytème.

74. En général, dans un système de nombres complexes le produit des deux facteurs complexes n'est pas indépendant de l'ordre de ces facteurs. Cherchons tous les systèmes pour lesquels ce dernier cas se présente, autrement dit *tous les systèmes à multiplication commutative.*

Si l'on suppose déterminés d'une certaine façon les modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ du système et les unités qui appartiennent chacune à un caractère déterminé, il est bien clair que pour aucune de ces unités η_i les deux indices (α, β) du caractère ne pourront être différents, sinon on aurait

$$\varepsilon_\alpha \eta_i = \eta_i, \quad \eta_i \varepsilon_\alpha = 0,$$

et la multiplication ne serait pas commutative. Il en résulte que, si h est supérieur à 1, le système se *décompose* en h autres systèmes formés respectivement des nombres appartenant aux caractères $(1, 1), (2, 2), \ldots, (h, h)$.

Donc, étant donné un système Σ indécomposable à multiplication associative et commutative, on peut déterminer r unités indépendantes $e, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{r-1}$ de ce système, de telle sorte qu'on ait

$$[illegible] \quad \eta_i \eta_j = \sum_{s=1}^{s=r-1} \alpha_{ijs} \eta_s,$$

où les constantes α_{ijs} sont égales à zéro, l'indice s étant supérieur à chacun des indices i et j.

Bien entendu, les constantes α_{ijs} doivent satisfaire à certaines relations qui expriment l'associativité de la multiplication.

VII.

SYSTÈMES RÉELS DE NOMBRES COMPLEXES.

75. Dans les paragraphes précédents nous avons supposé que les coefficients x_i des unités e_i dans l'expression

$$(1) \qquad x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_r e_r$$

d'un nombre complexe d'un système donné Σ pouvaient prendre toutes les valeurs, *réelles ou imaginaires*. Si nous ne l'avons pas supposé explicitement, nous l'avons fait implicitement en faisant la réduction canonique des unités, puisque nous n'avons fait aucune différence entre les racines réelles et les racines imaginaires de l'équation caractéristique.

Nous allons, dans ce paragraphe, considérer les systèmes pour lesquels les variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont *essentiellement réelles*. Alors il est bien clair que, le produit de deux nombres du système faisant encore partie du système, les constantes α_{ijs}, qui entrent dans les formules

$$(2) \qquad e_i e_j = \sum \alpha_{ijs} e_s,$$

sont aussi réelles. *Nous dirons qu'un système de cette nature est un système réel de nombres complexes.*

76. Il est bien évident qu'en considérant un système réel Σ à r unités indépendantes $e_1, e_2, \ldots, e_r$, si dans l'expression (1) on donne aux x des valeurs réelles ou imaginaires quelconques, on obtient un nouveau système Σ' qui peut être dit *prolongé* du système réel Σ. Naturellement pour ce système prolongé on peut appliquer tous les résultats des paragraphes précédents.

Cela étant, pour trouver tous les systèmes réels, nous n'aurons qu'à considérer tous les systèmes obtenus dans les paragraphes précédents et chercher s'ils peuvent être regardés comme les systèmes prolongés de systèmes réels.

77. Prenons d'abord les systèmes Σ' simples, c'est-à-dire ce que nous

avons appelé les p^2 — ions, formés de p^2 unités e_{ij} satisfaisant aux relations

$$e_{ij}e_{jl}=e_{il}.$$

Si un tel système Σ' peut être regardé comme résultant du prolongement d'un système réel, les unités e_{ij} de Σ' seront p^2 combinaisons linéaires à coefficients réels ou imaginaires des unités $e_1, e_2, \ldots, e_{p^2}$ du système réel Σ.

Si une de ces unités ne fait pas partie de Σ, nous dirons qu'elle est une *unité imaginaire,* et alors il y aura dans Σ' l'unité imaginaire conjuguée. Autrement dit, si l'on a

$$e_{ij}=(x_1+ix'_1)e_1+(x_2-ix'_2)e_2+\ldots,$$

le nombre

$$(x_1-ix'_1)e_1+(x_2-ix'_2)e_2+\ldots$$

fera partie de Σ' et sera dit *imaginaire conjugué* de e_{ij}. Il est clair que, si l'on change les unités de Σ, deux nombres imaginaires conjugués de Σ' ne cessent pas d'être imaginaires conjugués.

78. Cela étant, supposons que l'équation caractéristique de Σ, qui admet en général p racines distinctes, puisse, pour des valeurs réelles de $x_1, x_2, \ldots, x_{p^2}$, admettre un certain nombre de racines réelles et soit $p-2q$ le nombre maximum de ces racines réelles.

Il y a trois cas à distinguer, suivant que q est nul, que q est positif et inférieur à $\frac{p}{2}$ et, enfin, que q est égal à $\frac{p}{2}$.

Supposons d'abord que q soit nul. Alors pour un certain nombre u de Σ l'équation caractéristique a ses p racines réelles et distinctes. Ce nombre, considéré comme appartenant à Σ', peut toujours être supposé de la forme

$$u=\lambda_1e_{11}+\lambda_2e_{22}+\ldots+\lambda_pe_{pp}.$$

Or les racines de l'équation caractéristique de Σ sont, pour un nombre donné, les mêmes que celles de Σ'. Mais pour le nombre u de Σ', ces racines sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Il en résulte d'abord que ces p quantités sont réelles. De plus, l'ensemble des nombres x de Σ, pour lesquels on a

$$ux=\lambda_1x,$$

est compris dans l'ensemble des nombres de Σ' qui satisfont à cette même

condition. Autrement dit, on peut, en partant du nombre u de Σ, trouver p^2 unités de Σ appartenant toutes chacune à un caractère déterminé. Il est alors bien clair que ces p^2 unités sont proportionnelles aux e_{ij}, les facteurs de proportionnalité pouvant peut-être être imaginaires. Soient $a_{ij}e_{ij}$ ces unités. Mais de

$$(a_{11}e_{11})^2 = a_{11}(a_{11}e_{11})$$

on déduit nécessairement que a_{11} est réel et, par suite, peut être supposé égal à l'unité; de même pour les autres constantes.

On trouve donc dans ce premier cas le système réel de p^2 unités e_{ij} satisfaisant aux relations

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il}.$$

79. Supposons, en second lieu, que l'équation caractéristique de Σ admette pour toute valeur arbitraire des x des nombres imaginaires dont le nombre minimum $2q$ n'atteigne pas le nombre total p des racines.

Alors il existe un nombre u de Σ pour lequel l'équation caractéristique admet $2q$ racines imaginaires et $p-2q$ réelles. Considéré comme appartenant à Σ', ce nombre peut être supposé de la forme.

$$u = \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22} + \ldots + \lambda_p e_{pp},$$

et les racines de l'une ou l'autre équation caractéristique sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Supposons par exemple que λ_1 soit réel et que λ_2 et λ_3 soient imaginaires conjugués. Alors les nombres du système Σ pour lesquels

$$ux = \lambda_1 x$$

se déduisent tous des nombres

$$e_{11}, \quad e_{12}, \quad \ldots, \quad e_{1p};$$

autrement dit tous les nombres

(3) $$x_{11}e_{11} + x_{12}e_{12} + \ldots + x_{1p}e_{1p}$$

sont des combinaisons linéaires à coefficients réels ou imaginaires de p nombres distincts de Σ; il en est de même évidemment de tous les nombres

(4) $$x_{11}e_{11} + x_{21}e_{21} + \ldots + x_{p1}e_{p1};$$

par suite, les nombres communs à ces deux séries, à savoir $x_{11}e_{11}$, sont proportionnels à un certain nombre réel de Σ. Ce nombre réel est donc ae_{11},

où, comme on l'a déjà remarqué plus haut, on peut supposer a égal à l'unité.

De même, en considérant les deux racines imaginaires conjuguées λ_2 et λ_3, nous verrons que les nombres imaginaires de Σ qui satisfont à

$$ux = \lambda_2 x,$$

et ceux qui satisfont à

$$ux = \lambda_3 x,$$

sont deux à deux imaginaires conjugués. Autrement dit, tout nombre de la forme

$$(5) \qquad x_{21}e_{21} + x_{22}e_{22} + x_{23}e_{23} + \ldots + x_{2p}e_{2p}$$

est imaginaire conjugué d'un nombre de la forme

$$(6) \qquad x_{31}e_{31} + x_{32}e_{32} + x_{33}e_{33} + \ldots + x_{3p}e_{3p};$$

de même pour les deux familles de nombres

$$(7) \qquad x_{12}e_{12} + x_{22}e_{22} + x_{32}e_{32} + \ldots + x_{p2}e_{p2},$$

$$(8) \qquad x_{13}e_{13} + x_{23}e_{23} + x_{33}e_{33} + \ldots + x_{p3}e_{p3}.$$

Par suite le nombre e_{12} qui entre dans (3) et (7) est imaginaire conjugué d'un nombre entrant à la fois dans (3) et (8), c'est-à-dire d'un nombre de la forme ae_{13}. De même, e_{22} est imaginaire conjugué d'un nombre de la forme be_{33}; mais ici il en résulterait que le nombre imaginaire conjugué de u, qui doit être u lui-même, serait

$$u = \lambda_1 e_{11} + \lambda_3 b e_{33} + \ldots,$$

ce qui exige que b soit égal à 1.

En procédant de même pour les unités analogues nous voyons que nous pouvons faire correspondre à un certain nombre d'unités e_{ij} des nombres imaginaires conjugués de la façon suivante :

e_{11}	est imaginaire conjugué à	e_{11},
e_{22}	»	e_{33},
e_{12}	»	ae_{13},
e_{21}	»	be_{31},
e_{23}	»	ce_{32}.

On peut même voir immédiatement, en considérant les produits $e_{12}\,e_{21}$, $e_{23}\,e_{32}$, que ab est égal à 1 et c réel.

Nous pouvons, par suite, prendre dans Σ les 9 unités suivantes

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{llll} & \varepsilon = e_{11}, & & \\ \alpha = e_{22} + e_{33}, & \beta = ie_{22} - ie_{33}, & \gamma = e_{23} + ce_{32}, & \delta = ie_{23} - ice_{32}, \\ u = e_{12} + ae_{13}, & u' = ie_{12} - iae_{13}, & v = e_{21} + be_{31}, & v' = ie_{21} - ibe_{31}, \end{array}\right.$$

Or, si nous calculons le produit γv, nous trouvons

$$\gamma v = be_{21} + ce_{31};$$

si donc b est égal à $l + im$, on a nécessairement

$$\gamma v = lv + mv' = be_{21} + (l^2 + m^2)\,e_{31},$$

d'où l'on tire

$$c = l^2 + m^2 > 0.$$

Mais alors on a

$$\begin{aligned} \gamma(\gamma + \alpha\sqrt{c}) &= \sqrt{c}(\gamma + \alpha\sqrt{c}), \\ \gamma(\gamma - \alpha\sqrt{c}) &= -\sqrt{c}(\gamma - \alpha\sqrt{c}). \end{aligned}$$

Il en résulte que le nombre

$$\lambda_1 e_{11} + \lambda\gamma + \lambda_4 e_{44} + \ldots$$

admet aussi p racines distinctes, mais il a deux racines imaginaires de moins que le nombre d'où nous sommes partis, ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avions le nombre minimum de racines imaginaires.

80. *Il ne reste donc plus comme hypothèse admissible que celle où toutes les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires.* Il faut par suite supposer que le nombre entier p est *pair*.

En raisonnant comme dans le numéro précédent, nous pouvons supposer que e_{11} et e_{22}, e_{33} et e_{44}, ..., $e_{p-1,p-1}$ et e_{pp} sont respectivement imaginaires conjuguées. Nous verrons de même que $e_{2i-1,2j-1}$, $e_{2i-1,2j}$, $e_{2i,2j}$ sont imaginaires conjuguées de nombres de la forme $ae_{2i,2j}$, $be_{2i,2j-1}$, $ce_{2i-1,2j-1}$.

Nous pourrons alors introduire les p^2 unités suivantes de Σ

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} \bar{e}_{ij} &= e_{2i-1,2j-1} + c_{ij}\, e_{2i,2j}, \\ \bar{e}'_{ij} &= i e_{2i-1,2j-1} - i c_{ij}\, e_{2i,2j}, \\ \bar{e}''_{ij} &= e_{2i-1,2j} \quad - c'_{ij}\, e_{2i,2j-1}, \\ \bar{e}'''_{ij} &= i e_{2i-1,2j} \quad + i c'_{ij}\, e_{2i,2j-1}, \end{aligned}\right\} \quad \left(i, j = 1, 2, \ldots, \frac{p}{2}\right),$$

et ces p^2 unités peuvent être prises pour déterminer Σ. Les c_{ij} sont des constantes réelles ou imaginaires, les c_{ii} étant égales à l'unité.

On voit immédiatement que le produit de deux de ces unités est nul, si le second indice inférieur de la première est différent du premier indice inférieur de la seconde. Il ne nous reste donc qu'à étudier les produits de la forme $\bar{e}_{ij}\, \bar{e}_{jl}$, $\bar{e}_{ij}\, \bar{e}'_{jl}$, ...

Pour cela, nous formerons un Tableau carré analogue à la Table de multiplication, les lignes correspondant aux premiers facteurs, les colonnes aux seconds facteurs. Auparavant remarquons qu'en désignant par c^0_{ij} la quantité imaginaire conjuguée de c_{ij}, les nombres $\frac{e_{13}}{c^0_{13}}$, $\frac{e_{15}}{c^0_{15}}$, $\cdots$ sont respectivement imaginaires conjugués de e_{21}, e_{26}, ... Nous pouvons prendre ces nombres pour nouvelles unités e_{13}, e_{15}, ..., à condition de changer aussi d'une façon convenable, e_{31}, e_{51}, e_{35}, ..., mais sans avoir besoin de changer e_{21}, e_{26}, ... Nous pouvons donc en somme supposer que e_{13}, e_{15}, e_{17}, ... ont pour imaginaires conjugués e_{21}, e_{26}, e_{28}, ..., autrement dit que les constantes c_{1i} sont égales à l'unité.

Or on a

$$\bar{e}_{ij}\, \bar{e}_{jl} = e_{2i-1,2l-1} + c_{ij}\, c_{jl}\, e_{2i,2l};$$

la forme du second membre montre qu'il est égal à $\bar{e}_{il}$, cette unité étant la seule qui contienne $e_{2i-1,2l-1}$ avec un coefficient réel. On a donc

$$c_{ij}\, c_{jl} = c_{il},$$

et si dans cette formule on fait $i = 1$, on trouve $c_{jl} = 1$, c'est-à-dire que toutes les constantes c_{ij} sont égales à l'unité.

De même, la considération des produits $\bar{e}_{ij}\, \bar{e}''_{jl}$ et $\bar{e}''_{ij}\, \bar{e}_{jl}$ montre que c'_{il} est égale à c'_{ij} et c'_{jl}; par suite, toutes les constantes c' sont égales entre elles. Enfin le produit

$$\bar{e}''_{ij}\, \bar{e}''_{jl} = -c'(e_{2i-1,2l-1} + e_{2i,2l})$$

montre que c' doit être réel. Si c' était négatif on verrait, comme dans le numéro précédent, que l'équation caractéristique n'a pas toujours ses racines imaginaires, par exemple pour $u = \bar{e}''_{11}$. Donc c' est positif. En remplaçant alors $\bar{e}''_{ij}$, $\bar{e}'''_{ij}$ par $\frac{\bar{e}''_{il}}{\sqrt{c'}}$, $\frac{\bar{e}'''_{ij}}{\sqrt{c'}}$, on trouve sans difficulté le Tableau suivant :

(11)

	$\bar{e}_{jl}$	$\bar{e}'_{jl}$	$\bar{e}''_{jl}$	$\bar{e}'''_{jl}$
$\bar{e}_{ij}$	$\bar{e}_{il}$	$\bar{e}'_{il}$	$\bar{e}''_{il}$	$\bar{e}'''_{il}$
$\bar{e}'_{ij}$	$\bar{e}'_{il}$	$-\bar{e}_{il}$	$\bar{e}'''_{il}$	$-\bar{e}''_{il}$
$\bar{e}''_{ij}$	$\bar{e}''_{il}$	$-\bar{e}'''_{il}$	$-\bar{e}_{il}$	$\bar{e}'_{il}$
$\bar{e}'''_{ij}$	$\bar{e}'''_{il}$	$\bar{e}''_{il}$	$-\bar{e}'_{il}$	$-\bar{e}_{il}$

81. En résumé, *si le système prolongé d'un système réel est simple, ce système réel rentre dans l'un des deux types suivants :*

1° *Les systèmes du premier type ont p^2 unités indépendantes e_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$, et la loi de multiplication est donnée par les formules*

(12) $$e_{ij}\, e_{jl} = e_{il};$$

2° *Les systèmes du second type ont $4p^2$ unités indépendantes e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij}, e'''_{ij} et la loi de multiplication est donnée par les formules*

(15) $$\left\{\begin{array}{l} e_{ij}\, e_{jl} = -e'_{ij}\, e'_{jl} = -e''_{ij}\, e''_{jl} = -e'''_{ij}\, e'''_{jj} = e_{il}, \\ e_{ij}\, e'_{jl} = \quad e'_{ij}\, e_{jl} = e'_{il}, \\ e_{ij}\, e''_{jl} = \quad e''_{ij}\, e_{jl} = e''_{il}, \\ e_{ij}\, e'''_{jl} = \quad e''_{ij}\, e_{jl} = e'''_{il}, \\ e''_{ij}\, e'''_{jl} = -e'''_{ij}\, e''_{jl} = e'_{il}, \\ e'''_{ij}\, e'_{jl} = -e'_{ij}\, e'''_{jl} = e''_{il}, \\ e'_{ij}\, e''_{jl} = -e''_{ij}\, e''_{jl} = e'''_{il}. \end{array}\right.$$

Il est bien clair que ces systèmes réels sont *simples*, c'est-à-dire n'ad-

mettent aucun sous-système invariant réel; sinon le sous-système prolongé de ce sous-système invariant serait lui-même invariant dans le système total prolongé, ce qui est impossible.

Au cas de $p = 1$ correspondent deux systèmes particuliers remarquables : celui du premier type est formé d'une seule unité égale à son carré; celui du second type est formé de quatre unités et a évidemment pour système transformé ce que nous avons appelé *un quaternion*. Ces quatre unités e, e', e'', e''' ont la loi de multiplication indiquée par le Tableau suivant :

(14)

	e	e'	e''	e'''
e	e	e'	e''	e'''
e'	e'	$-e$	e'''	$-e''$
e''	e''	$-e'''$	$-e$	e'
e'''	e'''	e''	$-e'$	$-e$

C'est à ce système réel qu'on réserve d'ordinaire le nom de quaternion, c'est sous cette forme qu'il a été découvert par Hamilton.

On voit que les formules (13) peuvent être résumées symboliquement par la loi de multiplication (14) du quaternion et la loi de multiplication des indices inférieurs

$$[i, j][j, l] = [i, l].$$

82. Le cas des systèmes prolongés simples étant résolu, passons aux cas où le système prolongé Σ' est *semi-simple*.

L'équation caractéristique du système réel Σ, qui provient de l'équation caractéristique du système prolongé, se décompose alors en plusieurs équations irréductibles, qui, si l'on se permet l'usage des nombres imaginaires, proviennent des facteurs irréductibles du premier membre de l'équation caractéristique de Σ'. Si tous ces facteurs irréductibles de Σ' donnent pour Σ des facteurs *réels*, à chacun des systèmes simples qui composent Σ' correspondra un sous-système réel de Σ et, par suite, Σ se dé-

composera en plusieurs systèmes simples des deux types étudiés dans le numéro précédent.

Supposons maintenant qu'un facteur irréductible P du déterminant caractéristique de Σ' donne pour Σ un facteur imaginaire $A + iB$; alors il devra y avoir un second facteur irréductible Q qui devra fournir la quantité imaginaire conjuguée $A - iB$. Il est bien évident, par suite, que ces deux facteurs devront correspondre à deux systèmes simples σ'_1, σ'_2 de Σ' ayant le même nombre d'unités. De plus, l'ensemble des systèmes σ'_1, σ'_2 est manifestement prolongé d'un sous-système réel σ de Σ.

Les racines de l'équation caractéristique qui correspond au facteur $P = A + iB$ ne peuvent pas être, pour un nombre arbitraire de Σ, réelles, car elles satisferaient à $P = 0$ et $Q = 0$, et, par suite, les deux quantités P et Q auraient un facteur commun. Elles sont donc toutes imaginaires. Mais l'équation $P = 0$ ne peut pas admettre non plus deux racines imaginaires conjuguées, car elles satisferaient aussi à $Q = 0$. Par suite, les deux équations

$$P = 0, \qquad Q = 0$$

admettent des racines toutes imaginaires et les racines conjuguées de celles de la première sont celles de la seconde.

Cela étant, si nous désignons par e_{ij} les unités de σ'_1 et e'_{ij} celles de $\sigma'_2 (i, j = 1, 2, \ldots, p)$, un nombre arbitraire de Σ peut être supposé de la forme

$$\lambda_1 e_{11} + \ldots + \lambda_p e_{pp} + \lambda'_1 e'_{11} + \ldots + \lambda'_p e'_{pp} + \ldots;$$

les termes non écrits se rapportent aux autres systèmes simples qui composent Σ' : les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les racines de P, et les quantités $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_p$ sont celles de Q. Par suite, tout nombre de σ'_1 est imaginaire et admet pour imaginaire conjugué un nombre de σ'_2.

83. Il en résulte qu'aux unités e_{ij} de σ'_1, satisfaisant aux relations

$$e_{ij} e_{jl} = e_{il},$$

correspondent dans σ'_2 des nombres satisfaisant aux mêmes relations et, par suite, qu'on peut identifier avec les unités e'_{ij}.

Nous pouvons donc poser

$$(15) \qquad \begin{cases} \bar{e}_{ij} = e_{ij} + e'_{ij}, \\ \bar{e}'_{ij} = i e_{ij} - i e'_{ij}, \end{cases}$$

et les $2p^2$ unités $\bar{e}_{ij}$, $\bar{e}'_{ij}$ peuvent être prises pour déterminer le sous-système réel σ de Σ.

La loi de multiplication de ce système réel σ à $2p^2$ unités est alors fournie par le Tableau suivant :

(16)

	$\bar{e}_{jl}$	$\bar{e}'_{jl}$
$\bar{e}_{ij}$	$\bar{e}_{il}$	$\bar{e}'_{il}$
$\bar{e}'_{ij}$	$\bar{e}'_{il}$	$-\bar{e}_{il}$

Ce système réel σ est *simple*, c'est-à-dire n'admet aucun sous-système invariant réel. Si, en effet, le nombre

$$u = \sum \lambda_{ij}\bar{e}_{ij} + \lambda'_{ij}\bar{e}'_{ij}$$

faisait partie d'un sous-groupe invariant, il en serait de même des deux nombres

$$\bar{e}_{\alpha i}\, u\, \bar{e}_{j\beta} = \lambda_{ij}\bar{e}_{\alpha\beta} + \lambda'_{ij}\bar{e}'_{\alpha\beta},$$

$$\bar{e}_{\alpha i}\, u\, \bar{e}'_{j\beta} = \lambda_{ij}\bar{e}'_{\alpha\beta} - \lambda'_{ij}\bar{e}_{\alpha\beta}.$$

Si donc l'un des nombres λ_{ij}, λ'_{ij} n'est pas nul, le sous-système invariant contient toutes les unités $\bar{e}_{\alpha\beta}$, $\bar{e}'_{\alpha\beta}$, puisque le déterminant des coefficients de $\bar{e}_{\alpha\beta}$, $\bar{e}'_{\alpha\beta}$ dans les deux expressions précédentes est $\lambda_{ij}^2 + \lambda_i'^2 \neq 0$. Le sous-système invariant se confondrait donc avec le système total.

Il est bien clair alors que tout système réel Σ, admettant pour système prolongé un système semi-simple, s'obtient par la composition de systèmes réels rentrant dans le type précédent ou dans l'un des deux types du n° 81.

84. Il est facile maintenant de voir qu'on obtient ainsi tous les systèmes réels simples et semi-simples. En effet, si un système réel Σ a pour système prolongé un système Σ' qui n'est ni simple ni semi-simple, ce système Σ' admet un système invariant pseudo-nul, et ce système invariant s'obtient en égalant à zéro les dérivées partielles du coefficient de ω^{r-2} dans l'équa-

tion caractéristique. Mais si l'on prend pour unités de Σ' les unités de Σ, ce coefficient de ω^{r-2} est *réel et, par suite, le plus grand sous-système invariant pseudo-nul de Σ' est prolongé d'un sous-système invariant pseudo-nul de Σ.*

Donc Σ et Σ' sont en même temps semi-simples ou non.

Nous énoncerons donc le théorème suivant :

85. *Tout système réel simple rentre dans un des trois types suivants :*

1° *Les systèmes du premier type sont à p^2 unités e_{ij} avec la loi de multiplication*

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il};$$

2° *Les systèmes du second type sont à $2p^2$ unités e_{ij}, e'_{il} avec la loi de multiplication symbolique*

	e	e'
e	e	e'
e'	e'	$-e$

, $\quad [i, j][j, l] = [i, l];$

3° *Les systèmes du troisième type sont à $4p^2$ unités e_{ij}, e'_{ij}, e''_{il}, e'''_{il} avec la loi de multiplication symbolique*

	e	e'	e''	e'''
e	e	e'	e''	e'''
e'	e'	$-e$	e'''	$-e''$
e''	e''	$-e'''$	$-e$	e'
e'''	e'''	e''	$-e'$	$-e$

, $\quad [i, j][j, l] = [i, l].$

Tout système réel semi-simple est, par définition, formé par la composition de plusieurs systèmes réels simples.

Aux cas de $p = 1$ correspondent :

Pour le premier type, un système à une seule unité qu'on peut identifier avec le système des nombres réels ordinaires;

Pour le second type, un système à deux unités, e, e', qu'on peut identifier avec le système des nombres imaginaires ordinaires, e étant l'unité réelle et e' l'unité imaginaire i;

Pour le troisième type, un système à quatre unités qui n'est autre que le système des quaternions d'Hamilton.

Le cas général se ramène d'ailleurs à ce cas particulier de $p = 1$, à la condition de regarder les coefficients de e, e', e'', e''' (ou de e, e'; ou de e) comme des nombres complexes d'un p^2-ion. Cela revient, dans le troisième type, par exemple, à poser

$$e_{ij} = e\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\,e, \qquad e_{ij} = e'\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\,e', \qquad e''_{ij} = e''\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\,e'', \qquad e'''_{ij} = e'''\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\,e''',$$

et le nombre le plus général du système est alors

$$\left(\sum x_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)e + \left(\sum x'_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)e' + \left(\sum x''_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)e'' + \left(\sum x'''_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)e'''.$$

On peut encore ramener les systèmes du second et du troisième type à ceux du premier, à la condition de regarder les coefficients des unités e_{ij} comme des nombres imaginaires (2e type) ou comme des quaternions (3e type).

86. Étudions maintenant les systèmes réels Σ qui ne sont ni simples ni semi-simples. Ils admettent alors (84) un plus grand sous-système invariant pseudo-nul σ qui, prolongé, donne le plus grand sous-système invariant pseudo-nul σ' du système Σ', prolongé de Σ. *Je dis d'abord qu'on peut choisir les unités de Σ et les partager en deux séries de telle façon que les premières déterminent un sous-système simple ou semi-simple et les dernières le sous-système invariant pseudo-nul σ.*

Pour cela, reportons-nous au système prolongé Σ' de Σ. Pour ce système, qui n'est plus réel, le théorème est vrai (72). Imaginons que nous ayons pris les unités canoniques indiquées au n° 60 et obtenues en partant d'un nombre arbitraire de Σ'. Supposons enfin que ce nombre arbitraire appartienne à Σ.

Les Hp^2-ions de Σ', si l'on fait abstraction des nombres pseudo-nuls, fournissent alors, soit un par un, soit par couple de deux, des systèmes réels simples de l'un des trois types possibles.

Supposons d'abord qu'un p^2-ion (e_{ij}) de Σ' fournisse, toujours en faisant abstraction des nombres du système pseudo-nul, un système simple de Σ du premier type. Alors les unités $e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{pp}$ sont nécessairement réelles. On peut choisir arbitrairement e_{12} appartenant au caractère $(1, 2)$ relativement aux modules partiels $e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{pp}$; or, l'ensemble des nombres de caractère $(1, 2)$ se déduit de nombres réels; on peut donc supposer e_{12} réel, de même $e_{13}, \ldots, e_{1p}$. Alors e_{21} sera réel, car il n'y a qu'un nombre qui satisfasse à la relation

$$e_{12}\,e_{21} = e_{11};$$

e_{12} étant donné et, par suite, e_{12} et e_{11} étant réels, ce nombre ne peut être que réel ; de même pour $e_{31}, e_{41}, \ldots, e_{p1}$. On en déduit

$$e_{ij} = e_{i1}\,e_{1j},$$

formule qui donne pour e_{ij} un nombre réel, puisque c'est le produit de deux nombres réels, et l'on démontre alors immédiatement que ces p^2 unités réelles forment un système. C.Q.F.D

87. Supposons, en second lieu, que deux des p^2-ions de Σ' donnent, dans Σ, en faisant abstraction des nombres du système invariant pseudo-nul, un système simple du second type. Alors les unités e_{ij} du premier p^2-ion de Σ' sont imaginaires et il n'y a qu'à prendre leurs imaginaires conjuguées pour avoir d'autres unités qui forment un p^2-ion qu'on peut supposer être le second p^2-ion considéré de Σ'. On en déduit, comme au n° 83, l'existence de $2p^2$ unités réelles formant dans Σ un *sous-système* simple du deuxième type.

88. Enfin, supposons qu'un p^2-ion (e_{ij}) de Σ' donne dans Σ, en faisant toujours abstraction des nombres du système invariant pseudo-nul σ, un système simple du troisième type. Alors nous montrerons, comme au n° 80, que, abstraction faite de nombres de σ, on peut supposer que

$$e_{2i-1,2j-1} \quad \text{et} \quad e_{2i,2j} \quad \text{d'une part,}$$
$$e_{2i-1,2j} \quad \text{et} \quad -e_{2i,2j-1} \quad \text{d'autre part,}$$

sont imaginaires conjuguées. Nous allons d'abord traiter le problème dans le cas où *tous les produits de deux nombres quelconques de σ sont nuls.*

Remarquons d'abord qu'en désignant par η_{ij} un nombre de σ' appartenant au caractère (i, j) par rapport aux modules partiels $e_{11}, e_{22}, \ldots$, tout nombre $\eta_{2i-1,2j-1}$ est imaginaire conjugué d'un nombre $\eta_{2i,2j}$ et tout nombre $\eta_{2i-1,2j}$ d'un nombre $\eta_{2i,2j-1}$.

Cela étant, l'unité $e_{2i-1,2i-1}$ est imaginaire; l'unité imaginaire conjuguée est de la forme $e_{2i,2i} + \eta_{2i,2i}$; en écrivant qu'elle est égale à son carré, on voit manifestement que $\eta_{2i,2i}$ est nul. Donc d'abord $e_{2i-1,2i-1}$ et $e_{2i,2i}$ sont imaginaires conjuguées.

Prenons maintenant les unités $e_{13}, e_{15}, \ldots$ et les unités $e_{31}, e_{51}, \ldots$. On a

$$e_{1,2i-1}\, e_{2i-1,1} = e_{1,1} \qquad \text{et} \qquad e_{2i-1,1}\, e_{1,2i-1} = e_{2i-1,2i-1}.$$

Les nombres imaginaires conjugués de ces unités peuvent être pris pour unités $e_{24}, e_{26}, \ldots$ et $e_{42}, e_{62}, \ldots$. On a bien, en effet, en remplaçant dans les égalités précédentes chaque nombre par son imaginaire conjugué,

$$e_{2,2i}\, e_{2i,2} = e_{2,2} \qquad \text{et} \qquad e_{2i,2}\, e_{2,2i} = e_{2i,2i}.$$

Enfin, considérons l'unité e_{12}; elle a pour imaginaire conjugué un nombre de la forme $-e_{21} + \eta_{21}$. Supposons que le nombre η_{21} ne soit pas nul. Alors, si l'on désigne par $-\eta_{12}$ son imaginaire conjugué, le nombre e_{21} est conjugué de $-(e_{12} + \eta_{12})$. Or, des relations

$$e_{12}\, e_{21} = e_{11}, \qquad e_{21}\, e_{12} = e_{22}$$

on tire, en prenant les conjugués,

$$(e_{21} - \eta_{21})(e_{12} + \eta_{12}) = e_{22},$$
$$(e_{12} + \eta_{12})(e_{21} - \eta_{21}) = e_{11},$$

d'où, comme les produits de deux nombres η sont supposés nuls,

$$e_{21}\,\eta_{12} = \eta_{21}\, e_{12},$$
$$e_{12}\,\eta_{21} = \eta_{12}\, e_{21}.$$

Prenons alors les deux nombres

$$e'_{12} = e_{12} + \tfrac{1}{2}\eta_{12}, \qquad -e'_{21} = -e_{21} + \tfrac{1}{2}\eta_{21};$$

on voit facilement qu'ils sont imaginaires conjugués; mais ils satisfont à

la relation

$$e'_{12}\, e'_{21} = e_{12}\, e_{21} + \tfrac{1}{2}(\eta_{12}\, e_{21} - e_{12}\, \eta_{21}) = e_{11}.$$

Par suite, on peut supposer que e_{12} et $-e_{21}$ sont imaginaires conjugués.

Cela étant, nous nous sommes donné les nombres

$$e_{1,2i-1},\quad e_{2i-1,1},\quad e_{2,2i},\quad e_{2i,2},\quad e_{12},\quad e_{21};$$

prenons alors

$$\begin{aligned} e_{2i-1,2j-1} &= e_{2i-1,1}\, e_{1,2j-1}, \\ e_{2i-1,2j} &= e_{2i-1,1}\, e_{1,2}\, e_{2,2j}, \\ e_{2i,2j-1} &= e_{2i,2}\, e_{2,1}\, e_{1,2j-1}, \\ e_{2i,2j} &= e_{2i,2}\, e_{2,2j}. \end{aligned}$$

Nous obtiendrons p^2 unités, qui formeront encore un p^2-ion; mais maintenant nous voyons facilement que les nombres

$$\begin{array}{lcll} e_{2i-1,2j-1} & \text{et} & e_{2i,2j} & \text{d'une part,} \\ e_{2i-1,2j} & \text{et} & -e_{2i,2j-1} & \text{d'autre part,} \end{array}$$

sont imaginaires conjugués; les deux premiers, par exemple, s'obtiennent par deux formules dont les seconds membres sont imaginaires conjugués; de même pour les deux autres.

En introduisant alors les unités réelles $\bar{e}_{ij}$, $\bar{e}'_{ij}$, $\bar{e}''_{ij}$, $\bar{e}'''_{ij}$ comme au n° 80, nous arrivons à un *sous-système* simple réel.

89. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le produit de deux nombres quelconques de σ était constamment nul. Il est facile de lever cette restriction. Désignons par η_1, η_2, ... l'ensemble des nombres de σ dont les deux produits avec un autre nombre quelconque de σ sont nuls; désignons de même par ζ_1, ζ_2, ... l'ensemble des nombres de σ dont les deux produits avec un autre nombre quelconque de σ ne dépendent que de η_1, η_2, ...; ensuite appelons θ_1, θ_2, ... l'ensemble des nombres de σ dont les produits avec un autre nombre quelconque de σ ne dépendent que des ζ et des η, et ainsi de suite. Il est facile de voir que le produit d'un nombre quelconque de Σ par un nombre η donne encore un nombre η, par un nombre ζ donne une combinaison des ζ et des η, et ainsi de suite. Désignons par λ_1, λ_2, ... la dernière série de nombres de σ ainsi obtenue, et par $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ... l'avant-dernière.

Cela étant, on peut déterminer dans Σ $4p^2$ unités, e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij} et e'''_{ij}, telles que les produits deux à deux de ces unités s'expriment, à part des nombres de σ qui pourront être au second membre, comme dans la loi de multiplication des systèmes réels simples du troisième type. Commençons d'abord par faire abstraction des nombres $\varkappa, \ldots, \theta, \zeta, \eta$; si, dans les formules qui donnent la loi de multiplication de Σ, on supprime tous ces termes, on obtient des formules qui peuvent être regardées comme définissant la loi de multiplication d'un nouveau système; le raisonnement est le même qu'au numéro 35. Mais ce nouveau système a pour plus grand sous-système invariant pseudo-nul les nombres qui correspondent aux λ, c'est-à-dire *des nombres dont les produits deux à deux sont tous nuls*, puisqu'ils ne dépendaient primitivement que des $\varkappa, \ldots, \theta, \zeta, \eta$. Mais, d'après le numéro précédent, on peut supposer choisies les unités e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij}, e'''_{ij}, de façon qu'elles forment un sous-système. Donc, en revenant au système Σ lui-même, nous voyons que nous pouvons faire en sorte que les produits des e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij}, e'''_{ij} ne dépendent pas des nombres λ.

L'ensemble des nombres obtenus en supprimant les unités λ forme encore alors un système sur lequel on peut répéter le raisonnement précédent, les λ étant ici remplacés par les $\varkappa$. Et ainsi de suite, de proche en proche. A chaque opération, nous ajoutons donc aux unités e, e', e'', e''' des nombres de σ tels que les produits de ces unités deux à deux ne dépendent plus des λ, des $\varkappa$, ..., des θ, des ζ et enfin des η.

Par suite, on peut supposer que ces $4p^2$ unités forment un sous-système.

90. En résumé, les résultats précédents peuvent s'énoncer de la façon suivante :

Tout système réel qui n'est ni simple ni semi-simple est formé d'un sous-système simple ou semi-simple et d'un sous-système invariant pseudo-nul. De plus, la nature du sous-système simple ou semi-simple est parfaitement déterminée.

Nous allons maintenant étudier d'un peu plus près la loi de multiplication de ces systèmes réels généraux et notamment la loi de multiplication de deux facteurs, dont l'un appartient au sous-système simple ou semi-simple et l'autre au sous-système invariant pseudo-nul.

Nous commencerons par supposer que le plus grand sous-système semi-simple se compose de systèmes simples pour lesquels l'entier caractéristique p est égal à l'unité, c'est-à-dire de systèmes analogues au système des nombres réels ordinaires, à celui des nombres imaginaires ordinaires et à celui des quaternions d'Hamilton.

91. Dans cette hypothèse, si le système semi-simple se compose de h systèmes simples, on peut appeler e_i, e'_i, e''_i, e'''_i les unités de ce sous-système, l'indice i parcourant la suite $1, \ldots, h$, mais pour certains nombres de cette suite les unités e'', e''' ou encore les unités e', e'', e''' devant être supprimées.

On peut, comme au nº 20, déterminer les unités de σ, de telle façon qu'à chacune d'elles correspondent deux indices α, β, constituant le *caractère* de cette unité, de telle sorte qu'on ait

$$(17) \qquad e_\alpha \eta = \eta e_\beta = \eta, \qquad e_i \eta = \eta e_j = 0 \qquad (i \neq \alpha, \; j \neq \beta).$$

Alors on a manifestement, pour les mêmes valeurs de i et de j,

$$e'_i \eta = (e'_i e_\alpha)\eta = 0, \qquad \eta e'_j = \eta(e_\beta e'_j) = 0,$$

de même

$$e''_i \eta = \eta e''_j = e'''_i \eta = \eta e'''_j = 0;$$

au contraire, les produits $e'_\alpha \eta$, $e''_\alpha \eta$, $e'''_\alpha \eta$, si les unités e'_α, e''_α, e'''_α existent, appartiennent au caractère (α, β); de plus, ces quatre nombres η, $e'_\alpha \eta$, $e''_\alpha \eta$, $e'''_\alpha \eta$ sont indépendants; si, en effet, ils étaient liés par une relation

$$\lambda \eta + \lambda' e'_\alpha \eta + \lambda'' e''_\alpha \eta + \lambda''' e'''_\alpha \eta = 0,$$

où les λ sont des constantes réelles, on aurait, par multiplication à gauche successivement avec e'_α, e''_α, e'''_α,

$$\begin{aligned}
-\lambda' \eta + \lambda\, e'_\alpha \eta - \lambda''' e''_\alpha \eta + \lambda'' e'''_\alpha \eta &= 0,\\
-\lambda'' \eta + \lambda''' e'_\alpha \eta + \lambda\, e''_\alpha \eta - \lambda' e'''_\alpha \eta &= 0,\\
-\lambda''' \eta + \lambda'' e'_\alpha \eta - \lambda' e''_\alpha \eta + \lambda\, e'''_\alpha \eta &= 0;
\end{aligned}$$

et ces quatre équations ont pour déterminant $(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \lambda'''^2)^2$ qui est essentiellement différent de zéro. Si e_α et e'_α seules existaient, on démontrerait, de la même façon, que η et $e'_\alpha \eta$ sont deux nombres indépendants.

92. On peut particulariser davantage les unités η et séparer, dans certains cas, celles qui appartiennent à un caractère déterminé en plusieurs

catégories. Mais nous n'entrerons pas dans ces détails et nous nous contenterons de remarquer que le produit d'une unité de caractère (α, β) par une unité de caractère (γ, δ) est nul si β est différent de γ et ne dépend que des unités de caractère (α, δ) si β est égal à γ.

Enfin, on peut faire en sorte aussi que, les unités η conservant chacune un caractère déterminé, on puisse les affecter d'indices tels que le produit de deux unités η_i, η_j ne dépende que des unités η dont l'indice est supérieur à i et j.

Nous exprimerons tous ces résultats dans le théorème suivant :

93. *Étant donné un système réel dont le plus grand sous-système semi-simple se compose de h systèmes simples pour chacun desquels l'entier caractéristique p est égal à l'unité, c'est-à-dire de systèmes analogues au système des nombres réels ordinaires, au système des nombres imaginaires ordinaires et au système des quaternions d'Hamilton, on peut choisir les unités $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ du plus grand sous-système invariant pseudo-nul du système donné, de façon que les conditions suivantes soient réalisées :*

1° *A chaque unité η correspond un système de deux nombres α, β de la suite $1, 2, \ldots, h$ constituant le caractère de cette unité et tels que l'on ait*

$$e_\alpha \eta = \eta e_\beta = \eta,$$

tous les produits $e_i\eta$, $e'_i\eta$, $e''_i\eta$, $e'''_i\eta$, ηe_j, $\eta e'_j$, $\eta e''_j$, $\eta e'''_j$ étant nuls pour i différent de α et j différent de β ; e_i, e'_i, e''_i, e'''_i désignant, conformément aux notations du n° 85, les unités du $i^{\text{ième}}$ système simple, à condition de ne pas tenir compte, suivant les cas, des deux dernières ou des trois dernières de ces unités ;

2° *Suivant les cas, le produit $e'_\alpha\eta$ ou les trois produits $e'_\alpha\eta$, $e''_\alpha\eta$, $e'''_\alpha\eta$ donnent un ou trois nombres de même caractère (α, β) que η et indépendants entre eux et de η ;*

3° *Le produit d'une unité η de caractère (α, β) par une unité η de caractère (γ, δ) est nul si β est différent de γ et ne dépend que des unités de caractère (α, δ) si β est égal à γ ;*

4° *Le produit de deux unités η_i, η_j ne dépend que des unités dont l'indice est supérieur à chacun des indices i et j.*

Nous dirons que toutes les fois que les conditions qui viennent d'être

énoncées seront réalisées, les unités $e, e', \ldots, \eta$ seront *canoniques*, ce qui n'implique naturellement pas l'existence d'un *seul* choix d'unités canoniques.

94. Si nous appelons *systèmes réels* de la première classe les systèmes que nous venons d'étudier, nous passerons de ces systèmes à ceux de la deuxième classe absolument de la même façon que dans le cas des systèmes quelconques.

Tout système réel Σ de deuxième classe se réduit d'un système réel Σ' de première classe, de la façon suivante :

Imaginons que nous ayons choisi des unités canoniques pour ce système

$$E^{(1)}, \quad E^{(2)}, \quad \ldots, \quad E^{(H)};$$

chacune d'elles appartient à un certain caractère (α, β), où α, β sont deux des indices de la suite $1, 2, \ldots, H$, en supposant que le plus grand sous-système semi-simple de Σ' se décompose en H systèmes simples.

Nous ferons correspondre à chaque unité $E^{(\rho)}$ de caractère (α, β) un certain nombre $p_\alpha p_\beta$ d'unités $e_{ij}^{(\rho)}$, où i parcourt la série $1, 2, \ldots, p_\alpha$ et j la série $1, 2, \ldots, p_\beta$, les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_H$ étant H nombres entiers.

Si alors les formules qui donnent le produit de deux unités de Σ' sont

$$E^{(\rho)} E^{(\sigma)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=H} \alpha_{\rho\sigma\tau} E^{(\tau)},$$

les formules qui donnent le produit de deux unités de Σ sont

$$e_{ij}^{(\rho)} e_{jl}^{(\sigma)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=H} \alpha_{\rho\sigma\tau} e_{il}^{(\tau)},$$

i, j, l parcourant respectivement les séries $1, 2, \ldots, p_\alpha$; $1, 2, \ldots, p_\beta$; $1, 2, \ldots, p_\gamma$, si les caractères de $E^{(\rho)}$ et de $E^{(\sigma)}$ sont respectivement (α, β) et (β, γ). Les produits non écrits sont tous nuls.

On peut faire la même remarque qu'au n° 60 et regarder les nombres

du second système comme des nombres du premier système, les coefficients des unités étant des nombres complexes.

Nous dirons encore que, dans ce cas, les unités choisies sont canoniques.

95. Reprenons comme application le problème de trouver tous les systèmes réels à multiplication commutative. Nous verrons, comme au n° 74, qu'un système de cette nature, *qui ne se décompose pas*, est formé d'un sous-système simple et d'un sous-système invariant pseudo-nul. De plus, le sous-système simple est à une ou deux unités.

Tous les systèmes réels non décomposables à multiplication commutative rentrent dans un des deux cas suivants :

Dans le premier cas, on peut prendre pour définir le système des unités e, η_1, ..., *telles que l'on ait*

$$e^2 = e, \qquad e\eta_i = \eta_i e = \eta_i, \qquad \eta_i\eta_j = \sum \alpha_{ijs}\eta_s,$$

les constantes α_{ijs} *étant égales à* α_{jis} *et nulles toutes les fois que* s *ne dépasse pas à la fois les deux indices* i *et* j.

Dans le second cas, le sous-système simple est formé de deux unités e, e' *et l'on voit facilement que les unités* η, *qui sont en nombre pair, peuvent être partagées en deux séries* η_1, η_2, ..., η_k *d'une part,* η'_1, η'_2, ..., η'_k, *d'autre part, de telle façon qu'on ait les relations*

$$e^2 = -e'^2 = e, \qquad ee' = e'e = e',$$

$$e\eta_i = \eta_i e = \eta_i, \qquad e\eta'_i = \eta'_i e = \eta'_i,$$
$$e'\eta_i = \eta_i e' = \eta'_i, \qquad e'\eta'_i = \eta'_i e' = -\eta_i,$$

$$\eta_i\eta_j = -\eta'_i\eta'_j = \sum(\alpha_{ijs}\eta_s + \beta_{ijs}\eta'_s),$$

$$\eta_i\eta'_j = \eta'_i\eta_j = \sum(\alpha_{ijs}\eta'_s - \beta_{ijs}\eta_s);$$

les constantes α_{ijs} *et* α_{jis} *étant égales et nulles toutes les fois que* s *ne dépasse pas à la fois les deux indices* i *et* j; *de même pour les* β.

En particulier, on retrouve le système des nombres réels ordinaires et le système des nombres imaginaires ordinaires dans le cas particulier où le système est simple.

96. Enfin, un dernier problème intéressant qu'on peut se poser au sujet des systèmes réels est le suivant :

En général, il existe dans un système des nombres qui, multipliés par des facteurs convenables, donnent des produits nuls. On appelle ces nombres les *diviseurs de zéro*. Pour un système non réel, c'est-à-dire qui contient tous les nombres qui se déduisent linéairement de r unités avec des coefficients réels ou *imaginaires* quelconques, il y a toujours des diviseurs de zéro autres que zéro lui même, sauf dans le cas d'un système à une seule unité ; si, en effet, le système n'est pas semi-simple, c'est évident, puisqu'il admet un sous-système pseudo-nul dont toutes les unités sont des diviseurs de zéro ; s'il est semi-simple, il en est de même ; il suffit de prendre, dans un système simple e_{ij}, les deux unités e_{11} et e_{22} dont le produit est nul.

Pour un système réel, au contraire, il y a d'autres systèmes que celui à une seule unité qui n'admettent aucun diviseur de zéro. Tout d'abord, un tel système doit être simple, pour les raisons qui viennent d'être exposées. De plus, le nombre p, caractéristique de ce système simple, doit être égal à l'unité, sinon on aurait, comme tout à l'heure, deux unités e_{11}, e_{22} de produit nul.

Il reste donc seulement les trois systèmes simples à 1, 2, 4 unités, c'est-à-dire le système des nombres réels ordinaires, celui des nombres imaginaires ordinaires et celui des quaternions d'Hamilton.

Réciproquement pour les deux premiers de ces systèmes, la propriété n'a pas besoin d'être démontrée ; quant au troisième, on la démontre en considérant directement le produit de deux nombres

$$(xe + x'e' + x''e'' + x'''e''')(ye + y'e' + y''e'' + y'''e''');$$

les coefficients de e, e', e'', e''' dans le produit sont des formes bilinéaires des x et des y, et le déterminant des coefficients des x dans ces formes est $(y^2 + y'^2 + y''^2 + y'''^2)^2$, d'où l'on déduit que les quatre formes ne peuvent être nulles que si l'on a à la fois tous les x nuls ou tous les y nuls.

97. Nous avons donc le théorème suivant :

Étant donné un système réel de nombres complexes à multiplication associative, si l'on veut que la multiplication satisfasse à la loi que le produit de deux facteurs ne puisse être nul sans que l'un des facteurs soit nul, ce système est :

Ou bien le système des nombres réels ordinaires ;
Ou bien le système des nombres imaginaires ordinaires ;
Ou bien le système des quaternions d'Hamilton.

Si l'on veut, en outre, que la multiplication soit commutative, il ne reste que le système des nombres réels ordinaires et celui des nombres imaginaires ordinaires.

D'ailleurs, ce théorème aurait pu se démontrer avant tout développement sur les systèmes *réels* de nombres complexes, la condition pour qu'un système n'admette pas de diviseur de zéro étant que le terme indépendant de ω dans le premier membre de l'équation caractéristique ne puisse s'annuler pour aucun nombre du système. Cela étant, ce terme indépendant de ω est un produit de déterminants de degrés $p_1, p_2, \ldots$. L'un de ces déterminants peut s'annuler en annulant, par exemple, tous les p éléments d'une même ligne, ce qui fait au *plus* $2p$ équations linéaires *réelles*. Il faut donc que r ne dépasse pas $2p$, ce qui exige déjà que p ne dépasse pas 2. On a alors ou bien un quaternion, ou bien un système de première classe à deux unités ou une unité.

VIII.

LES GROUPES BILINÉAIRES SIMPLEMENT TRANSITIFS.

98. Nous avons vu (11) qu'on pouvait toujours choisir les paramètres d'un groupe bilinéaire simplement transitif, de façon que ce groupe devînt son propre groupe des paramètres. Alors on peut faire en sorte qu'on ait en même temps

$$(1) \qquad X_i f = \sum_{k,s} \alpha_{iks} x_k \frac{\partial f}{\partial x_s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

et

$$(2) \qquad X_i(X_k f) = \sum_s \alpha_{iks} X_s f.$$

Il correspond (13) à ce groupe un système Σ de nombres complexes à r unités indépendantes $e_1, e_2, \ldots, e_r$, dont la loi de multiplication est fournie par les relations

$$(3) \qquad e_i e_k = \sum_s \alpha_{iks} e_s.$$

Réciproquement, si l'on part d'un système de nombres complexes défini par les formules (3), il lui correspond un groupe simplement transitif dont les transformations infinitésimales $X_i f$ ont la forme (1).

Enfin, les équations finies du groupe correspondant à la transformation *finie* $a_1 X_1 f + \ldots + a_r X_r f$ sont

$$(4) \qquad x'_s = \sum_{k,i} \alpha_{kis} a_i x_k;$$

elles expriment tout simplement que $x'_1 e_1 + \ldots + x'_r e_r$ est le produit des deux nombres $x_1 e_1 + \ldots + x_r e_r$ et $a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r$. En particulier, la transformation *finie* $X_1 f$ donne le produit du nombre $x_1 e_1 + \ldots + x_r e_r$ par l'unité e_1. Le nombre complexe $a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r$ symbolise donc la transformation finie de paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$, et la transformation résultant de la succession de deux transformations particulières $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ est symbolisée, d'une part, par

$$a_1 X_1\Big(\sum b_i X_i f\Big) + a_2 X_2\Big(\sum b_i X_i f\Big) + \ldots + a_r X_r\Big(\sum b_i X_i f\Big),$$

d'autre part, par le nombre complexe produit des deux nombres

$$a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r, \quad b_1 e_1 + \ldots + b_r e_r.$$

99. A tout sous-système de Σ correspond un sous-groupe de G, et ce sous-groupe est encore bilinéaire. A tout sous-système *invariant* de Σ correspond un sous-groupe g : $Y_1 f, \ldots, Y_m f$ de G tel que l'on ait, quelles que soient les transformations infinitésimales Xf de G, Yf de g,

$$X(Yf) = \lambda_1 Y_1 f + \ldots + \lambda_m Y_m f, \qquad Y(Xf) = \mu_1 Y_1 f + \ldots + \mu_m Y_m f;$$

a fortiori le crochet

$$(XY) = X(Yf) - Y(Xf)$$

aura une expression de même forme. Il en résulte, d'après une terminologie bien connue, que g est un sous-groupe *invariant* de G.

Donc à tout sous-système invariant σ de Σ correspond un sous-groupe invariant g de G. Il n'est même pas nécessaire que σ soit un sous-système proprement dit; il peut n'avoir pas de module, il ne lui en correspond pas moins un sous-groupe invariant de G; mais naturellement ce sous-groupe invariant n'est plus bilinéaire.

En particulier à un sous-groupe invariant *pseudo-nul*

$$y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \ldots + y_k\eta_k$$

correspond un sous-groupe invariant g, Y_1f, ..., Y_kf, tel que l'on ne puisse jamais avoir

$$Y(Xf) = \omega Xf \qquad \omega \neq 0,$$

ou

$$X(Yf) = \omega' Xf \qquad \omega' \neq 0$$

pour aucune des transformations Yf de ce sous groupe et Xf du groupe G. On ne pourra non plus jamais avoir

$$(YX) = Y(Xf) - X(Yf) = \omega Xf, \tag{5}$$

car on aurait de même

$$\eta e - e\eta = \omega e, \tag{6}$$

η appartenant à σ et e à Σ. Mais on sait qu'il existe un entier m tel que $\eta^m e$ soit nul; si m désigne le plus petit des entiers satisfaisant à cette condition, on a, en multipliant à gauche par η^{m-1} les deux membres de (6),

$$-\eta^{m-1}e.\eta = \omega\eta^{m-1}e,$$

ce qui est impossible, puisque η est pseudo-nul.

Le sous-groupe invariant g qui correspond au sous-système invariant pseudo-nul σ est donc, d'après une dénomination due à Killing, de rang zéro : son équation caractéristique n'admet que des racines nulles.

100. Si le système Σ se décompose en deux systèmes Σ_1, Σ_2, on voit facilement que le groupe G est formé de deux groupes G_1 et G_2 qui n'ont aucune variable ni aucun paramètre en commun et qui sont chacun bilinéaires. Au point de vue du groupe G, il n'y a donc intérêt à considérer que les systèmes qui ne se décomposent pas.

Prenons d'abord les systèmes simples. Ils sont définis par p unités e_{ij} satisfaisant aux relations

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il}. \tag{7}$$

Il correspond à un tel système le groupe

$$(8) \qquad X_{ij}f = x_{1i}\frac{\partial f}{\partial x_{1j}} + x_{2i}\frac{\partial f}{\partial x_{2j}} + \ldots + x_{pi}\frac{\partial f}{\partial x_{pj}},$$

dont les équations finies sont

$$(9) \qquad x'_{ij} = a_{1j}x_{i1} + a_{2j}x_{i2} + \ldots + a_{pj}x_{ip}.$$

On voit que ce groupe transforme entre elles les variables $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1p}$ par exemple, et à la façon du groupe linéaire et homogène général. Comme le groupe (9) est son propre groupe des paramètres, nous voyons qu'il n'est autre que le groupe des paramètres du groupe linéaire et homogène général de p variables.

A tout système simple de p^2 unités correspond, comme groupe bilinéaire simplement transitif, le groupe des paramètres du groupe linéaire et homogène général de p variables.

101. Prenons maintenant les systèmes de la première classe. On sait que l'on peut prendre des unités canoniques $e_1, e_2, \ldots, e_h$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ telles que l'on ait

$$(10) \qquad e_i^2 = e_i, \qquad e_i e_j = 0, \qquad e_\alpha \eta_i = \eta_i e_\beta = \eta_i, \qquad \eta_i \eta_j = \sum_s^{s>i,\, s>j} \alpha_{ijs}\eta_s,$$

les indices α, β qui entrent dans ces formules constituant le caractère de l'unité η_i considérée.

En désignant par

$$x_1 e_1 + \ldots + x_h e_h + y_1 \eta_1 + \ldots + y_k \eta_k$$

un nombre quelconque du système Σ, et en appelant (α_i, β_i) le caractère de l'unité η_i, on voit, en passant au groupe simplement transitif G, que l'on peut prendre

$$(11) \qquad \begin{cases} X_i f = x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_\rho y_\rho \frac{\partial f}{\partial y_\rho} & (\beta_\rho = i), \\ Y_i f = x_{\alpha_i} \dfrac{\partial f}{\partial y_i} + \displaystyle\sum_{j,s} \alpha_{jis} y_j \frac{\partial f}{\partial y_s} & (s > i,\ s > j); \end{cases}$$

les constantes α_{jis} ne pouvant être différentes de zéro que si l'on a

$$\beta_j = \alpha_i, \qquad \alpha_s = \alpha_j, \qquad \beta_s = \beta_i.$$

De plus les équations finies de ce groupe sont

$$(12) \qquad \begin{cases} x'_i = a_i x_i, \\ y'_i = a_{\beta_i} y_i + b_i x_{\alpha_i} + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu i} b_\mu y_\lambda \qquad (\lambda < i, \mu < i). \end{cases}$$

Nous dirons que les formules (11) ou (12) fournissent une représentation canonique du groupe G.

On voit qu'en rangeant les variables dans l'ordre $x_1, x_2, \ldots, x_h, y_1, y_2, \ldots, y_k$, les expressions d'une quelconque de ces variables transformées ne dépendent pas des variables qui la suivent. Par suite, d'après une dénomination à M. Lie, le groupe G est *intégrable*. Il laisse invariante chacune des multiplicités planes

$$x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_h = y_1 = \ldots = y_k = 0,$$
$$y_{i+1} = y_{i+2} = \ldots = y_k = 0.$$

A tout système de nombres complexes de la première classe correspond donc un groupe bilinéaire simplement transitif et intégrable dont les transformations infinitésimales peuvent être supposées avoir la forme (11) *et les équations finies la forme* (12).

102. Nous avons vu (60) comment on pouvait trouver tous les systèmes de nombres complexes de la deuxième classe au moyen de ceux de la première. A chaque unité de caractère (α, β) d'une de ces dernières nous avons fait correspondre $p_\alpha p_\beta$ unités dans le système de la deuxième classe correspondant. En passant des systèmes aux groupes simplement transitifs, nous voyons que nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Tout groupe simplement transitif se déduit d'un groupe de la forme (11) *ou* (12)

$$(11)' \qquad \begin{cases} X^{(i)}f = X^{(i)} \dfrac{\partial f}{\partial X^{(i)}} + \sum_\rho Y^{(\rho)} \dfrac{\partial f}{\partial Y^{(\rho)}} \qquad (\beta_\rho = i), \\ Y^{(i)}f = X^{(\alpha_i)} \dfrac{\partial f}{\partial Y^{(i)}} + \sum_{j,s} \alpha_{jis} Y^{(j)} \dfrac{\partial f}{\partial Y^{(s)}} \qquad \begin{pmatrix} s > i,\ s > j;\ \beta_j = \alpha_i \\ \alpha_s = \alpha_j,\ \beta_s = \beta_i \end{pmatrix} \end{cases}$$

ou

$$(12)' \quad \begin{cases} \mathrm{X}'^{(i)} = \mathrm{A}^{(i)}\mathrm{X}^{(i)}, \\ \mathrm{Y}'^{(i)} = \mathrm{A}^{(\beta_i)}\mathrm{Y}^{(i)} + \mathrm{B}^{(i)}\mathrm{X}^{(\alpha_i)} + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu i}\mathrm{B}^{(\mu)}\mathrm{Y}^{(\lambda)} \qquad (\lambda < i,\ \mu < i), \end{cases}$$

en faisant correspondre à chaque variable $\mathrm{X}^{(\rho)}$ *ou* $\mathrm{Y}^{(\rho)}$ *de caractère* (α, β) $p_\alpha p_\beta$ *nouvelles variables* $x_{ij}^{(\rho)}$, $y_{ij}^{(\rho)}$, *où* i, j *sont respectivement deux quelconques des nombres des séries* $1, 2, \ldots, p_\alpha$ *et* $1, 2, \ldots, p_\beta$. *On fait de même correspondre à chaque paramètre* $\mathrm{A}^{(\rho)}$, $\mathrm{B}^{(\rho)}$ *de caractère* (α, β) $p_\alpha p_\beta$ *nouveaux paramètres* $a_{ij}^{(\rho)}$, $b_{ij}^{(\rho)}$.

Le groupe simplement transitif considéré est alors défini soit par les transformations infinitésimales

$$(13) \quad \begin{cases} \mathrm{X}_{\alpha\beta}^{(i)}f = \sum_{\lambda}^{1,2,\ldots,p_i} x_{\lambda\alpha}^{(i)} \dfrac{\partial f}{\partial x_{\lambda\beta}^{(i)}} + \sum_{\rho,\lambda}^{\lambda=1,2,\ldots,p_{\alpha_\rho}} y_{\lambda\alpha}^{(\rho)} \dfrac{\partial f}{\partial y_{\lambda\beta}^{(\rho)}} \qquad \left(\begin{matrix} \beta_\rho = i \\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p_i \end{matrix}\right), \\ \mathrm{Y}_{\alpha\beta}^{(i)}f = \sum_{\lambda} x_{\lambda\alpha}^{(\alpha_i)} \dfrac{\partial f}{\partial y_{\lambda\beta}^{(i)}} + \sum_{j,s,\lambda}^{\lambda=1,2,\ldots,p_{\alpha_\rho}} \alpha_{jis}\, y_{\lambda\alpha}^{(j)} \dfrac{\partial f}{\partial y_{\lambda\beta}^{(s)}}, \end{cases}$$

soit par les équations finies

$$(14) \quad \begin{cases} x_{\alpha\beta}'^{(i)} = \sum_{\lambda}^{1,2,\ldots,p_i} a_{\lambda\beta}^{(i)} x_{\alpha\lambda}^{(i)}, \\ y_{\alpha\beta}'^{(i)} = \sum_{\lambda} a_{\lambda\beta}^{(\beta_i)} y_{\alpha\lambda}^{(i)} + \sum_{\lambda} b_{\lambda\beta}^{(i)} x_{\alpha\lambda}^{(\alpha_i)} + \sum_{\rho,\sigma,\lambda} \alpha_{\rho\sigma i}\, b_{\lambda\beta}^{(\sigma)} y_{\alpha\lambda}^{(\rho)}. \end{cases}$$

103. *Tout groupe bilinéaire simplement transitif* G *est formé d'un sous-groupe* Γ *de rang zéro et d'un sous-groupe* g *se décomposant en* h *groupes* $g_1, g_2, \ldots, g_h$ *respectivement isomorphes aux groupes linéaires et homogènes généraux de* $p_1, p_2, \ldots, p_h$ *variables. De plus on peut choisir les variables de façon que les* p_1^2 *premières soient échangées entre elles par le premier* g_1 *de ces* h *groupes à la façon des paramètres du groupe linéaire et homogène général de* p_1 *variables et ne soient altérées par aucun des* $h - 1$ *autres groupes; de même pour les* $p_2^2, \ldots, p_h^2$ *variables suivantes; enfin de façon que ces* $p_1^2 + \ldots + p_h^2$ *variables ne soient pas altérées par le sous-groupe invariant* Γ *de rang zéro.*

Ce théorème résulte manifestement des formules (13) et (14).

On voit enfin que tous les groupes bilinéaires simplement transitifs seront connus dès que l'on saura déterminer tous les groupes bilinéaires simplement transitifs intégrables de la forme (11) *ou* (12).

104. Ce qui précède s'applique aux groupes bilinéaires pour lesquels les variables et les paramètres peuvent prendre des valeurs quelconques réelles ou imaginaires. Occupons-nous maintenant des groupes réels, c'est-à-dire dont les variables et les paramètres sont essentiellement réels.

Tout groupe bilinéaire réel simplement transitif G *est formé d'un sous-groupe invariant* Γ *de rang zéro et d'un sous-groupe* g *se décomposant en* h *groupes* $g_1, g_2, \ldots, g_h$ *rentrant tous dans l'un des trois types suivants :*

1° *Les groupes du premier type sont à* p^2 *variables* x_{ij} *et sont donnés par les formules*

$$\text{(15)} \qquad X_{ij}f = x_{1i}\frac{\partial f}{\partial x_{1j}} + x_{2i}\frac{\partial f}{\partial x_{2j}} + \ldots + x_{pi}\frac{\partial f}{\partial x_{pj}}$$

ou

$$\text{(16)} \qquad x'_{ij} = a_{1j}x_{i1} + a_{2j}x_{i2} + \ldots + \alpha_{pj}x_{ip};$$

on obtient ainsi le groupe des paramètres du groupe linéaire et homogène général à p *variables*;

2° *Les groupes du second type sont à* $2p^2$ *variables* x_{ij}, y_{ij} *et sont donnés par les formules*

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} X_{ij}f = x_{1i}\dfrac{\partial f}{\partial x_{1j}} + \ldots + x_{pi}\dfrac{\partial f}{\partial x_{pj}} + y_{1i}\dfrac{\partial f}{\partial y_{1j}} + \ldots + y_{pi}\dfrac{\partial f}{\partial y_{pj}}, \\ Y_{ij}f = x_{1i}\dfrac{\partial f}{\partial y_{1j}} + \ldots + x_{pi}\dfrac{\partial f}{\partial y_{pj}} - y_{1i}\dfrac{\partial f}{\partial x_{1j}} - \ldots - y_{pi}\dfrac{\partial f}{\partial x_{pj}} \end{cases}$$

ou

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} x'_{ij} = a_{1j}x_{i1} + \ldots + a_{pj}x_{ip} - b_{1j}y_{i1} - \ldots - b_{pj}y_{ip}, \\ y'_{ij} = a_{1j}y_{i1} + \ldots + a_{pj}y_{ip} + b_{1j}x_{i1} + \ldots + b_{pj}x_{ip}; \end{cases}$$

3° *Les groupes du troisième type sont à* $4p^2$ *variables* x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, t_{ij}

et sont donnés par les formules

$$
(19)\quad \begin{cases}
X_{ij}f = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\left(x_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda j}} + y_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial y_{\lambda j}} + z_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda j}} + t_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial t_{\lambda j}}\right),\\
Y_{ij}f = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\left(x_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial y_{\lambda j}} - y_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda j}} - z_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial t_{\lambda j}} + t_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda j}}\right),\\
Z_{ij}f = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\left(x_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda j}} + y_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial t_{\lambda j}} - z_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda j}} - t_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial y_{\lambda j}}\right),\\
T_{ij}f = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\left(x_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial t_{\lambda j}} - y_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda j}} + z_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial y_{\lambda j}} - t_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda j}}\right)
\end{cases}
$$

ou

$$
(20)\quad \begin{cases}
x'_{ij} = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}(a_{\lambda j}x_{i\lambda} - b_{\lambda j}y_{i\lambda} - c_{\lambda j}z_{i\lambda} - d_{\lambda j}t_{i\lambda}),\\
y'_{ij} = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}(a_{\lambda j}y_{i\lambda} + b_{\lambda j}x_{i\lambda} - c_{\lambda j}t_{i\lambda} - d_{\lambda j}z_{i\lambda}),\\
z'_{ij} = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}(a_{\lambda j}z_{i\lambda} + b_{\lambda j}t_{i\lambda} + c_{\lambda j}x_{i\lambda} - d_{\lambda j}y_{i\lambda}),\\
t'_{ij} = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}(a_{\lambda j}t_{i\lambda} - b_{\lambda j}z_{i\lambda} + c_{\lambda j}y_{i\lambda} + d_{\lambda j}x_{i\lambda}),
\end{cases}
$$

A chacun de ces groupes à p^2 ($2p^2$ *ou* $4p^2$) *variables on peut faire correspondre* p^2 ($2p^2$ *ou* $4p^2$) *variables qui soient échangées entre elles suivant les formules* (16), (18) ou (20), *sans être altérées par aucun des autres groupes qui composent* g *ni par le sous-groupe invariant* Γ. *De plus, toutes ces variables sont indépendantes entre elles.*

105. Rappelons que l'on appelle groupe *simple* un groupe qui n'admet aucun sous-groupe invariant.

Les groupes (16), (18) et (20) *ne sont pas simples, mais ils se composent d'un sous-groupe invariant à un paramètre et d'un sous-groupe invariant simple à* $p^2 - 1$ ($2p^2 - 1$ *ou* $4p^2 - 1$) *paramètres.*

Prenons, par exemple, le groupe (19) ou (20) et prenons d'abord le cas particulier où p est égal à 1. Rappelons que la transformation

$aXf + bYf + cZf + dTf$ étant symbolisée par $ac + bc' + ce'' + de'''$, le crochet de deux transformations infinitésimales symbolisées par les nombres complexes u et v est symbolisé par le nombre $uv - vu$. Supposons donc qu'un sous-groupe invariant contienne la transformation

$$aXf + bYf + cZf + dTf;$$

en prenant le crochet de cette transformation avec Yf, Zf, Tf, on obtient successivement

$$dZf - cTf, \quad bTf - dYf, \quad cYf - bZf$$

transformations qui doivent aussi faire partie du sous-groupe invariant. Le même procédé, appliqué à ces nouvelles transformations, donne

$$cZf + dTf, \quad dTf + bYf, \quad bYf + cZf,$$

d'où l'on déduit l'existence, dans le sous-groupe, de aXf, bYf, cZf, dTf. Si b, par exemple, n'est pas nul, le sous-groupe invariant contient Yf et par suite $(YZ) = 2Tf$, $(YT) = -2Zf$; il contient donc les trois transformations Yf, Zf, Tf qui effectivement forment un sous-groupe invariant. Il en est de même si c et d ne sont pas nuls tous les deux. Si enfin b, c, d sont nuls tous les trois, il reste la transformation Xf qui engendre un sous-groupe invariant à un paramètre. Ces deux sous-groupes sont *échangeables* entre eux, c'est-à-dire que le crochet d'une transformation de l'un et d'une transformation de l'autre est toujours nul. Il en résulte que le groupe à trois paramètres (Xf, Zf, Tf) est *simple*, car, s'il admettait un sous-groupe invariant, il serait aussi invariant dans le groupe total, ce qui n'est pas.

Passons au cas où p est plus grand que 1. Supposons qu'un sous-groupe invariant du groupe (19) ou (20) contienne la transformation

$$(21) \qquad Uf = \sum (a_{ij} X_{ij}f + b_{ij} Y_{ij}f + c_{ij} Z_{ij}f + d_{ij} T_{ij}f);$$

il contiendra alors

$$\begin{aligned}(X_{\alpha\beta}U) = & \sum_i (a_{\beta i} X_{\alpha i}f + b_{\beta i} Y_{\alpha i}f + c_{\beta i} Z_{\alpha i}f + d_{\beta i} T_{\alpha i}f) \\ & - \sum_i (a_{i\alpha} X_{i\beta}f + b_{i\alpha} Y_{i\beta}f + c_{i\alpha} Z_{i\beta}f + d_{i\alpha} T_{i\beta}f).\end{aligned}$$

Si l'on fait subir à la transformation du second membre la même opération qu'à la transformation Uf, on trouve une nouvelle transformation

$$-2(a_{\beta\alpha}X_{\alpha\beta}f + b_{\beta\alpha}Y_{\alpha\beta}f + c_{\beta\alpha}Z_{\alpha\beta}f + d_{\beta\alpha}T_{\alpha\beta}f),$$

en supposant α différent de β. En combinant successivement avec $Y_{\alpha\alpha}f$, $Z_{\alpha\alpha}f$, $T_{\alpha\alpha}f$, on en déduit trois autres transformations, combinaisons linéaires de $X_{\alpha\beta}f$, $Y_{\alpha\beta}f$, $Z_{\alpha\beta}f$, $T_{\alpha\beta}f$, et le déterminant des coefficients est $(a^2_{\beta\alpha} + b^2_{\beta\alpha} + c^2_{\beta\alpha} + d^2_{\beta\alpha})^2$. Par suite, si l'un des nombres $a_{\beta\alpha}$, $b_{\beta\alpha}$, $c_{\beta\alpha}$, $d_{\beta\alpha}$ est différent de zéro, le sous-groupe invariant contient les quatre transformations $X_{\alpha\beta}f$, $Y_{\alpha\beta}f$, $Z_{\alpha\beta}f$, $T_{\alpha\beta}f$. En combinant avec $X_{i\alpha}f$, on en déduit tous les $X_{i\beta}f$, $Y_{i\beta}f$, $Z_{i\beta}f$, $T_{i\beta}f$ $(i \neq \beta)$ et, par suite, aussi tous les $X_{ij}f, \ldots, T_{ij}f$, pour i différent de j. Les formules

$$(X_{ij}Y_{ji}) = Y_{ii}f - Y_{jj}f,$$
$$(Z_{ij}T_{ji}) = Y_{ii}f + Y_{jj}f$$

montrent alors que le sous-groupe invariant contient tous les Yf et, de même, tous les Zf et tous les Tf. Enfin de

$$(X_{ij}X_{ji}) = X_{ii}f - X_{jj}f$$

on déduit l'existence de tous les $X_{ii}f - X_{pp}f$. Si donc un sous-groupe invariant contient une transformation Uf pour laquelle les coefficients a, b, c, d qui ont deux indices différents ne sont pas tous nuls, ce sous-groupe invariant contient, au moins, $4p^2 - 1$ transformations infinitésimales indépendantes

$$X_{ii}f - X_{pp}f,\quad X_{ij}f,\quad Y_{ii}f,\quad Y_{ij}f,\quad Z_{ii}f,\quad Z_{ij}f,\quad T_{ii}f,\quad T_{ij}f.$$

Réciproquement, d'ailleurs, ces transformations forment bien un sous-groupe invariant; c'est le plus grand sous-groupe du groupe donné qui fasse partie du groupe linéaire et homogène *spécial* des $4p^2$ variables x, y, z, t.

Si, maintenant, les coefficients a, b, c, d de Uf sont tous nuls à l'exception des a_{ii}, b_{ii}, c_{ii}, d_{ii}, il en doit être de même pour la transformation $(X_{\alpha\beta}U)$, sans quoi on tomberait sur le cas précédent; par suite, en considérant les coefficients de $X_{\alpha\beta}f$, $Y_{\alpha\beta}f$, $Z_{\alpha\beta}f$, $T_{\alpha\beta}f$, on voit que tous les a_{ii} sont égaux, de même tous les b_{ii}, tous les c_{ii}, tous les d_{ii}. Si, maintenant, les b ne sont pas nuls, le crochet $(Z_{\alpha\beta}U)$ contiendrait un terme en $T_{\alpha\beta}f$,

ce qui est impossible. Il reste donc seulement l'hypothèse où Uf est, à un facteur constant près,

$$Uf = X_{11}f + X_{22}f + \dots + X_{pp}f;$$

cette transformation engendre bien un sous-groupe invariant, puisqu'elle est échangeable avec toutes les autres transformations du groupe.

Il en résulte, comme tout à l'heure, que le premier sous-groupe invariant à $4p^2 - 1$ paramètres est *simple*.

Le même raisonnement s'appliquerait évidemment *a fortiori* aux groupes du premier et du second type.

106. *Enfin, les résultats du n° 94 montrent que tous les groupes bilinéaires, simplement transitifs, sont déterminés dès qu'on connaît ceux pour lesquels les entiers $p_1, p_2, \dots, p_h$ (n° 104) sont égaux à l'unité.*

107. A un système à multiplication commutative correspond un groupe bilinéaire simplement transitif, dont toutes les transformations sont échangeables entre elles, autrement dit un groupe en *involution*, et réciproquement.

Cela étant, les résultats du n° 95 nous permettent de donner la forme générale des groupes bilinéaires simplement transitifs en involution qui ne se décomposent pas. S'ils sont réels, ils rentrent dans deux types distincts.

Ceux du premier type sont définis par les formules

$$(21)\quad \begin{cases} Xf = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + \displaystyle\sum_i y_i \dfrac{\partial f}{\partial y_i}, \\ Y_i f = x\dfrac{\partial f}{\partial y_i} + \displaystyle\sum_{\lambda, s} \alpha_{\lambda i s} y_\lambda \dfrac{\partial f}{\partial y_s} \\ (i = 1, 2, \dots, r-1;\ \alpha_{\lambda i s} = 0, \text{ pour } s \leqq i \text{ ou } s \leqq \lambda), \end{cases}$$

ou

$$(22)\quad \begin{cases} x' = ax, \\ y'_i = ay_i + b_i x + \displaystyle\sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda \mu i} b_\mu y_\lambda. \end{cases}$$

Ceux du second type sont définis par les formules

$$(23)\quad \begin{cases} Xf = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} + \sum\limits_i \left(y_i \dfrac{\partial f}{\partial y_i} + t_i \dfrac{\partial f}{\partial t_i}\right), \\ Zf = x\dfrac{\partial f}{\partial z} + z\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sum\limits_i \left(y_i \dfrac{\partial f}{\partial t_i} + t_i \dfrac{\partial f}{\partial y_i}\right), \\ Y_i f = x\dfrac{\partial f}{\partial y_i} + z\dfrac{\partial f}{\partial t_i} + \sum\limits_{\lambda, s} (\alpha_{\lambda i s} y_\lambda - \beta_{\lambda i s} t_\lambda)\dfrac{\partial f}{\partial y_s} + \sum\limits_{\lambda, s} (\beta_{\lambda i s} y_\lambda + \alpha_{\lambda i s} t_\lambda)\dfrac{\partial f}{\partial t_s}, \\ T_i f = x\dfrac{\partial f}{\partial t_i} + z\dfrac{\partial f}{\partial y_i} + \sum\limits_{\lambda, s} (\beta_{\lambda i s} y_\lambda + \alpha_{\lambda i s} t_\lambda)\dfrac{\partial f}{\partial y_s} + \sum\limits_{\lambda, s} (\alpha_{\lambda i s} y_\lambda - \beta_{\lambda i s} t_\lambda)\dfrac{\partial f}{\partial t_s}, \end{cases}$$

ou

$$(24)\quad \begin{cases} x' = ax - cz, \\ z' = az + cx, \\ y'_i = ay_i - ct_i + b_i x - d_i z + \sum \alpha_{\lambda\mu i}(b_\mu y_\lambda - d_\mu t_\lambda) - \sum \beta_{\lambda\mu i}(b_\mu t_\lambda + d_\mu y_\lambda), \\ t'_i = at_i + cy_i + b_i z + d_i x + \sum \alpha_{\lambda\mu i}(b_\mu t_\lambda + d_\mu y_\lambda) + \sum \beta_{\lambda\mu i}(b_\mu y_\lambda - d_\mu t_\lambda). \end{cases}$$

IX.

LES GROUPES BILINÉAIRES QUELCONQUES.

108. La structure d'un groupe bilinéaire quelconque étant la même que celle de son groupe des paramètres, nous pouvons appliquer les résultats du paragraphe précédent.

Tout groupe bilinéaire G *se compose d'un sous-groupe invariant* Γ *de rang zéro et d'un sous-groupe g qui se décompose en un certain nombre h de groupes qui sont respectivement isomorphes avec les groupes linéaires et homogènes généraux de* $p_1, p_2, \ldots, p_h$ *variables.*

Tout groupe bilinéaire réel G *se compose d'un sous-groupe invariant réel* Γ *de rang zéro et d'un sous-groupe g qui se décompose en un certain nombre h de groupes, dont chacun est isomorphe à un des trois groupes suivants :*

1° *Le groupe linéaire et homogène général de p variables;*

2° *Le groupe à* $2p^2$ *paramètres et* $2p$ *variables* x_i, y_i

$$(1)\quad \begin{cases} x'_i = a_{1i}x_1 + \ldots + a_{pi}x_p - b_{1i}y_1 - \ldots - b_{pi}y_p, \\ y'_i = a_{1i}y_1 + \ldots + a_{pi}y_p + b_{1i}x_1 + \ldots + b_{pi}x_p. \end{cases}$$

3° *Le groupe à $4p^2$ paramètres et $4p$ variables x_i, y_i, z_i, t_i*

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x'_i &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} (a_{\lambda i} x_\lambda - b_{\lambda i} y_\lambda - c_{\lambda i} z_\lambda - d_{\lambda i} t_\lambda),\\
y'_i &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda i} y_\lambda + b_{\lambda i} x_\lambda + c_{\lambda i} t_\lambda + d_{\lambda i} z_\lambda),\\
z'_i &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda i} z_\lambda + b_{\lambda i} t_\lambda + c_{\lambda i} x_\lambda + d_{\lambda i} y_\lambda),\\
t'_i &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda i} t_\lambda + b_{\lambda i} z_\lambda + c_{\lambda i} y_\lambda + d_{\lambda i} x_\lambda).
\end{aligned}
\right.
$$

Chacun de ces groupes est formé d'un sous-groupe invariant simple à $p^2(2p^2 - 1$ ou $4p^2 - 1)$ paramètres et d'un sous-groupe invariant à un paramètre.

109. Voyons, d'une manière plus précise, la forme effective de ces groupes g_1, g_2, ..., g_h qui correspondent aux sous-systèmes simples des systèmes de nombres complexes.

Rappelons que nous faisons correspondre une transformation finie (ou infinitésimale) Xf à un nombre u du système, de telle façon que, si u et v sont les deux nombres qui correspondent aux transformations Xf, Yf, le produit uv correspond à la transformation $X(Yf)$.

Cela étant, prenons, par exemple, le sous-groupe g. Il lui correspond un sous-système simple. Supposons, pour fixer les idées, que ce sous-système soit du troisième type. Il est alors formé de $4p^2$ unités e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij}, e'''_{ij} auxquelles correspondront, dans G, $4p^2$ transformations $X_{ij}f$, $Y_{ij}f$, $Z_{ij}f$, $T_{ij}f$. Si l'on désigne par f une fonction linéaire des variables que transforme le groupe, on a

$$X_{11}[X_{11}(f)] = X_{11}(f),$$

ou

$$(3)\qquad X_{11}[X_{11}(f) - f] = 0.$$

Cela étant, si $X_{11}(\varphi)$ est égal à $f + \varphi$, φ étant une certaine forme linéaire, il est clair que l'on a

$$(4)\qquad X_{11}(f + \varphi) = f + \varphi.$$

puisque l'équation (3) exprime simplement que $X_{11}(\varphi)$ est nul. *Par suite, on peut toujours choisir les variables x du groupe de telle façon que, pour chacune d'elles, $X_{11}(x)$ soit égal à x ou à zéro.*

Cela étant, partons d'une variable x_1 telle que l'on ait

$$X_{11}(x_1) = x_1; \tag{5}$$

posons

$$Y_{11}(x_1) = -y_1, \qquad Z_{11}(x_1) = -z_1, \qquad T_{11}(x_1) = -t_1;$$

il est facile de se rendre compte que ces quatre variables sont indépendantes; car, si l'on avait

$$\varphi = a x_1 - a' y_1 - a'' z_1 - a''' t_1 = 0,$$

les expressions de $Y_{11}(\varphi)$, $Z_{11}(\varphi)$, $T_{11}(\varphi)$, qui devront être aussi identiquement nulles, montrent que a, a', a'', a''' doivent être tous nuls.

En calculant $X_{11}(f)$, $Y_{11}(f)$, $Z_{11}(f)$, $T_{11}(f)$ pour chacune des variables x_1, y_1, z_1, t_1, on trouve, en se servant des valeurs des produits des unités e_{11}, e'_{11}, e''_{11}, e'''_{11}, que l'on a

$$X_{11} f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + t_1 \frac{\partial f}{\partial t_1} + \ldots,$$

$$Y_{11} f = -y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + t_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial f}{\partial t_1} + \ldots,$$

$$Z_{11} f = -z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - t_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial t_1} + \ldots,$$

$$T_{11} f = -t_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial t_1} + \ldots.$$

En partant de même d'une variable x'_1 telle que $X_{11}(x'_1)$ soit égal à x'_1 indépendante de x_1, y_1, z_1, t_1, on en déduira trois nouvelles variables y'_1, z'_1, t'_1 qu'on vérifiera facilement former avec les précédentes huit variables indépendantes; et ainsi de suite. Nous obtiendrons, par exemple, m systèmes de quatre variables, que nous écrirons désormais

$$x_1^{(i)}, \quad y_1^{(i)}, \quad z_1^{(i)}, \quad t_1^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

et alors on a

$$[illegible]$$

[illegible] Introduisons maintenant $2n$ nouvelles variables [illegible] en posant

$$[illegible]$$

Ces $2n$ variables sont indépendantes entre elles et des $2n$ premières [illegible], on aurait une relation de la forme

$$[illegible]$$

Mais en appliquant [illegible] le premier membre de cette identité [illegible], on en déduirait

$$[illegible]$$

ce qui est impossible.

[illegible] nous avons supposé les variables choisies de manière [illegible] les expressions [illegible] sont [illegible] nulles, car on a

$$[illegible]$$

[illegible] pour toutes les variables [illegible] pour lesquelles [illegible] est nul, [illegible] est aussi nul.

[illegible] les expressions [illegible] aussi [illegible].

$Z_{21}f$, $T_{21}f$:

$$(7)\quad \begin{cases} X_{21}f = \sum \left(x_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i^1} - y_i^2 \frac{\partial f}{\partial y_i^1} - z_i^2 \frac{\partial f}{\partial z_i^1} - t_i^2 \frac{\partial f}{\partial t_i^1} \right), \\ Y_{21}f = \sum \left(- y_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i^1} - x_i^2 \frac{\partial f}{\partial y_i^1} - t_i^2 \frac{\partial f}{\partial z_i^1} - z_i^2 \frac{\partial f}{\partial t_i^1} \right), \\ Z_{21}f = \sum \left(- z_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i^1} - t_i^2 \frac{\partial f}{\partial y_i^1} - x_i^2 \frac{\partial f}{\partial z_i^1} - y_i^2 \frac{\partial f}{\partial t_i^1} \right), \\ T_{21}f = \sum \left(- t_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i^1} - z_i^2 \frac{\partial f}{\partial y_i^1} - y_i^2 \frac{\partial f}{\partial z_i^1} - x_i^2 \frac{\partial f}{\partial t_i^1} \right). \end{cases}$$

On définira de même $x_i^3, \ldots, t_i^3, \ldots, x_i^p, \ldots, t_i^p$ par la considération des transformations $X_{31}f, \ldots, X_{p1}f$. Nous avons ainsi $4mp$ variables toutes indépendantes entre elles en fonction desquelles s'expriment simplement toutes ces transformations. On en déduit immédiatement les expressions de $X_{13}f$, Y_{13}, $Z_{13}f$, $T_{13}f$ par la considération des identités

$$(X_{13}X_{31}f) = X_{11}f, \qquad (X_{13}X_{21}f) = 0$$

qui donnent

$$X_{13}x_i^3 = x_i^1, \quad \ldots, \quad X_{13}t_i^3 = t_i^1, \quad X_{13}x_i^2 = 0, \quad \ldots, \quad X_{13}t_i^2 = 0.$$

Enfin on déduit de là

$$X_{23}f = (X_{21}X_{13}f), \quad \ldots, \quad T_{23}f = (T_{21}X_{13}f).$$

111. En faisant les calculs qui viennent d'être indiqués on trouve ainsi, pour les douze groupes considérés, les formules suivantes

$$(8)\quad \begin{cases} X_{23}f = \sum_{i=1}^{i=m} \left(x_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i^3} - y_i^2 \frac{\partial f}{\partial y_i^3} - z_i^2 \frac{\partial f}{\partial z_i^3} - t_i^2 \frac{\partial f}{\partial t_i^3} \right), \\ Y_{23}f = \sum_{i=1}^{i=m} \left(- y_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i^3} - x_i^2 \frac{\partial f}{\partial y_i^3} - t_i^2 \frac{\partial f}{\partial z_i^3} - z_i^2 \frac{\partial f}{\partial t_i^3} \right), \\ Z_{23}f = \sum_{i=1}^{i=m} \left(- z_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i^3} - t_i^2 \frac{\partial f}{\partial y_i^3} - x_i^2 \frac{\partial f}{\partial z_i^3} - y_i^2 \frac{\partial f}{\partial t_i^3} \right), \\ T_{23}f = \sum_{i=1}^{i=m} \left(- t_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i^3} - z_i^2 \frac{\partial f}{\partial y_i^3} - y_i^2 \frac{\partial f}{\partial z_i^3} - x_i^2 \frac{\partial f}{\partial t_i^3} \right) \end{cases}$$

et alors on a

$$
(6)\quad \begin{cases}
X_{11}f = \sum_i \left(x_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + y_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} + z_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + t_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}} \right), \\
Y_{11}f = \sum_i \left(-y_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + x_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} + t_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} - z_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}} \right), \\
Z_{11}f = \sum_i \left(-z_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} - t_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + x_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + y_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}} \right), \\
T_{11}f = \sum_i \left(-t_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + z_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} - y_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + x_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}} \right).
\end{cases}
$$

110. Introduisons maintenant $4m$ nouvelles variables $x_2^{(i)}$, $y_2^{(i)}$, $z_2^{(i)}$, $t_2^{(i)}$ en posant

$$
(7)\qquad x_2^{(i)} = X_{21}(x_1^{(i)}), \qquad y_2^{(i)} = X_{21}(y_1^{(i)}), \qquad z_2^{(i)} = X_{21}(z_1^{(i)}), \qquad t_2^{(i)} = X_{21}(t_1^{(i)}).
$$

Ces $4m$ variables sont indépendantes entre elles et des $4m$ premières; sinon, en effet, on aurait une relation de la forme

$$
\sum [a_i X_{21}(x_1^{(i)}) + \ldots + d_i X_{21}(t_1^{(i)}) + \alpha_i X_{11}(x_1^{(i)}) + \ldots + \delta_i X_{11}(t_1^{(i)})] = 0.
$$

Mais, en appelant f le premier membre de cette identité et formant $X_{12}(f)$, on en déduirait

$$
\sum (a_i x_1^{(i)} + b_i y_1^{(i)} + c_i z_1^{(i)} + d_i t_1^{(i)}) = 0,
$$

ce qui est impossible.

De plus, comme nous avons supposé les variables choisies de manière que $X_{11}(x)$ fût égal à x ou à zéro, les expressions $X_{11}(x)$ et $X_{21}(x)$ sont en même temps nulles; car on a

$$
X_{21}[X_{11}(x)] = X_{21}(x);
$$

on voit bien que, pour toutes les variables x pour lesquelles $X_{11}(x)$ est nul, X_{21} est aussi nul.

Par suite, on a l'expression définitive de $X_{21}f$ et aussi celles de $Y_{21}f$,

$Z_{21}f$, $\Gamma_{21}f$:

$$(7)\quad \begin{cases} X_{21}f = \sum\left(x_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + y_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} + z_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + t_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}}\right), \\ Y_{21}f = \sum\left(-y_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + x_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} + t_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} - z_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}}\right), \\ Z_{21}f = \sum\left(-z_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} - t_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} + x_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + y_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}}\right), \\ T_{21}f = \sum\left(-t_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + z_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} - y_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + x_2^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial s_1^{(i)}}\right). \end{cases}$$

On définira de même $x_3^{(i)}, \ldots, t_3^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)}, \ldots, t_p^{(i)}$ par la considération des transformations $X_{31}f, \ldots, X_{p1}f$. Nous avons ainsi $4mp$ variables toutes indépendantes entre elles en fonction desquelles s'expriment simplement toutes ces transformations. On en déduit immédiatement les expressions de $X_{1\beta}f$, $Y_{1\beta}$, $Z_{1\beta}f$, $T_{1\beta}f$ par la considération des identités

$$X_{1\beta}(X_{\beta 1}f) = X_{11}f, \qquad X_{1\beta}(X_{\alpha 1}f) = 0$$

qui donnent

$$X_{1\beta}x_\beta^{(i)} = x_1^{(i)}, \quad \ldots, \quad X_{1\beta}t_\beta^{(i)} = t_1^{(i)}, \quad X_{1\beta}x_\alpha^{(i)} = 0, \quad \ldots, \quad X_{1\beta}t_\alpha^{(i)} = 0.$$

Enfin on déduit de là

$$X_{\alpha\beta}f = X_{\alpha 1}(X_{1\beta}f), \quad \ldots, \quad T_{\alpha\beta}f = T_{\alpha 1}(X_{1\beta}f).$$

111. En faisant les calculs qui viennent d'être indiqués on trouve ainsi, pour les douze groupes considérés, les formules suivantes

$$(0)\quad \begin{cases} X_{\alpha\beta}f = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m}\left(x_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_\beta^{(i)}} + y_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_\beta^{(i)}} + z_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_\beta^{(i)}} + t_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_\beta^{(i)}}\right), \\ Y_{\alpha\beta}f = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m}\left(-y_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_\beta^{(i)}} + x_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_\beta^{(i)}} + t_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_\beta^{(i)}} - z_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_\beta^{(i)}}\right), \\ Z_{\alpha\beta}f = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m}\left(-z_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_\beta^{(i)}} - t_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_\beta^{(i)}} + x_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_\beta^{(i)}} + y_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_\beta^{(i)}}\right), \\ T_{\alpha\beta}f = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m}\left(-t_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_\beta^{(i)}} + z_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_\beta^{(i)}} + y_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_\beta^{(i)}} + x_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_\beta^{(i)}}\right) \end{cases}$$

ou

$$
(9)\quad
\begin{cases}
x_\alpha^{(i)'} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda\alpha} x_\lambda^{(i)} - b_{\lambda\alpha} y_\lambda^{(i)} - c_{\lambda\alpha} z_\lambda^{(i)} - d_{\lambda\alpha} t_\lambda^{(i)}),\\
y_\alpha^{(i)'} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda\alpha} y_\lambda^{(i)} + b_{\lambda\alpha} x_\lambda^{(i)} - c_{\lambda\alpha} t_\lambda^{(i)} + d_{\lambda\alpha} z_\lambda^{(i)}),\\
z_\alpha^{(i)'} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda\alpha} z_\lambda^{(i)} + b_{\lambda\alpha} t_\lambda^{(i)} + c_{\lambda\alpha} x_\lambda^{(i)} - d_{\lambda\alpha} y_\lambda^{(i)}),\\
t_\lambda^{(i)'} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda\alpha} t_\lambda^{(i)} - b_{\lambda\alpha} z_\lambda^{(i)} + c_{\lambda\alpha} y_\lambda^{(i)} + d_{\lambda\alpha} x_\lambda^{(i)}).
\end{cases}
$$

On voit que ces formules ne sont autres que les formules (2) appliquées à m systèmes de quatre variables.

Bien évidemment si le système simple considéré appartenait au second et au premier type, il n'y aurait qu'à supprimer les variables z et t dans le premier cas, y, z et t dans le second cas, ainsi que les transformations Zf et Tf, ou bien Yf, Zf et Tf, suivant les cas.

Nous pouvons faire rentrer tous ces cas dans une seule formule; posons, en effet,

$$
(10)\quad
\begin{cases}
x_\alpha^{(i)} e + y_\alpha^{(i)} e' + z_\alpha^{(i)} e'' + t_\alpha^{(i)} e''' = X_\alpha^{(i)},\\
a_{\lambda\alpha} e + b_{\lambda\alpha} e' + c_{\lambda\alpha} e'' + d_{\lambda\alpha} e''' = A_{\lambda\alpha},
\end{cases}
$$

e, e', e'', e''' désignant les unités d'un système de quaternions d'Hamilton; alors les formules (9) s'écriront

$$
(11)\quad X_\alpha^{(i)'} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} X_\lambda^{(i)} . A_{\lambda\alpha}.
$$

Ces formules conviennent encore au cas des systèmes simples du second type en regardant les $X_\lambda^{(i)}$ et les $A_{\lambda\alpha}$ comme des variables (ou paramètres) imaginaires et au cas des systèmes simples du premier type en regardant les X et les A comme des quantités réelles.

112. D'après cela, nous énoncerons le théorème suivant :

Tout groupe bilinéaire G est formé d'un sous-groupe invariant de rang zéro Γ et d'un ou plusieurs groupes g_1, g_2, ..., dont chacun g est, symboliquement, le groupe linéaire et homogène général d'un certain

nombre de séries de p variables $X_1, X_2, \ldots, X_p$, *ces variables étant, suivant les cas, réelles, imaginaires ou des quaternions, et les* p^2 *paramètres ayant la même nature*

$$(12) \qquad X_\alpha^{(i)\prime} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} X_\lambda^{(i)} A_{\lambda\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Si les variables et les paramètres du groupe bilinéaire G sont des quantités imaginaires quelconques, le groupe est formé d'un sous-groupe invariant de rang zéro Γ *et d'un ou plusieurs sous-groupes* g_1, $g_2, \ldots$, *dont chacun g est le groupe linéaire et homogène général d'un certain nombre de séries de p variables, naturellement imaginaires.*

S'il y a plusieurs groupes g, les variables transformées par l'un d'eux ne le sont pas par les autres : cela tient à ce que, si l'on considère les systèmes simples correspondants, le produit de deux nombres quelconques appartenant à deux de ces systèmes est nul. Par suite, toutes les variables introduites pour chacun des sous-groupes $g_1, g_2, \ldots$, sont indépendantes entre elles et de plus elles fournissent toutes les variables du groupe comme on s'en rend compte en considérant la transformation du groupe qui correspond au module du système de nombres complexes et qui est la somme des transformations telles que $X_{ii}f$; cette transformation est

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant *toutes* les variables du groupe.

SUR LE

PROBLÈME DE L'ITÉRATION,

PAR M. C. BOURLET.

Le problème général de l'*Itération* peut être posé de la façon suivante :

Soit $\varphi(z)$ *une fonction donnée de la variable* z; *posons*

$$\varphi_0(z) = z, \qquad \varphi_1(z) = \varphi(z), \qquad \varphi_2(z) = \varphi[\varphi(z)], \qquad \ldots$$

plus généralement

$$\varphi_k(z) = \varphi[\varphi_{k-1}(z)].$$

Soit $\varphi_{-1}(z)$ *la fonction inverse de* $\varphi(z)$; *nous poserons encore*

$$\varphi_{-2}(z) = \varphi_{-1}[\varphi_{-1}(z)], \qquad \ldots, \qquad \varphi_{-k-1}(z) = \varphi_{-1}[\varphi_{-k}(z)].$$

On aura, alors, pour toutes les valeurs entières positives ou négatives des indices de p *et* q,

$$\varphi_p[\varphi_q(z)] = \varphi_{p+q}(z);$$

et il s'agit de trouver une fonction $\psi(k, z)$ *de la variable* z *et du paramètre* k *telle que l'on ait*

$$\text{(A)} \qquad \psi(p, z) = \varphi_p(z),$$

pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de p, *et telle, en outre, que l'on ait*

$$\text{(B)} \qquad \psi[k, \psi(k', z)] = \psi(k + k', z),$$

quels que soient les nombres k *et* k', *réels ou imaginaires.*

Ce problème a déjà donné lieu à de remarquables travaux. Étudié d'abord

par Schröder [1] et Korkine [2], il a été repris, plus récemment, par M. Kœnigs [3].

Schröder et Korkine se sont surtout occupés du calcul des coefficients du développement de la fonction $\psi(k, z)$ suivant les puissances croissantes de $z - x$, x étant *point limite* de la fonction $\varphi(z)$; mais, outre que leurs méthodes se bornent à montrer comment on calculera de proche en proche ces coefficients, elles présentent l'inconvénient de présupposer soit l'existence de la fonction $\psi(k, z)$, soit la convergence des développements étudiés.

Korkine, à vrai dire, a donné une seconde méthode, fort ingénieuse, dans laquelle il montre que la fonction $\psi(k, z)$ peut être mise sous la forme

$$\psi(k, z) = \pi_{-1}[k + \pi(z)]$$

et la recherche de cette fonction est ainsi ramenée à celle de la fonction $\pi(z)$, qui vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel

$$\pi[\varphi(z)] = 1 + \pi(z).$$

Il donne une expression *formelle* de $\pi(z)$, dans laquelle figure un développement en une série doublement infinie dont, malheureusement, il n'a pas établi la convergence.

M. Kœnigs, en se plaçant à un tout autre point de vue, et sans rechercher la forme de la fonction $\psi(k, z)$, a démontré d'une façon rigoureuse son *existence*.

Aucun de ces auteurs, comme on le voit, n'a donné une expression *explicite* de cette fonction $\psi(k, z)$ *dont la validité soit assurée*.

Cependant Schröder indique dans son Mémoire, aux notations près, la formule suivante [4] :

$$\begin{aligned}\varphi_r(z) = \varphi_0(z) + \frac{r}{1}[\varphi_1(z) - \varphi_0(z)] + \frac{r(r-1)}{1.2}[\varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) + \varphi_0(z)] + \ldots \\ + \frac{r(r-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(r-1)r}\left[\varphi_r(z) - \frac{r}{1}\varphi_{r-1}(z) + \frac{r(r-1)}{1.2}\varphi_{r-2}(z) - \ldots + (-1)^r\varphi_0(z)\right].\end{aligned}$$

---

(1) SCHRÖDER, *Ueber iterirte Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. III, p. 296).

(2) KORKINE, *Sur un problème d'interpolation* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, p. 228; 1882).

(3) KŒNIGS, *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. II, p. 385; 1885).

(4) Cette formule a été suggérée à Schröder par une autre formule donnée par Cayley dans le *Quarterly Journal*, t. LI, p. 1; pour ma part, je l'avais retrouvée en appliquant la formule d'interpolation de Newton.

où r désigne un *entier positif* et où le second membre ne contient que $r+1$ termes. Il est vraiment curieux qu'il n'ait pas eu l'idée d'appliquer cette formule au cas de r quelconque car, en remplaçant la somme du second membre par une série, il aurait été ainsi conduit à la solution explicite qui fait l'objet de ce Travail.

I.

Je rappelle d'abord deux propriétés de la fonction de substitution $\varphi(z)$.

1° Soit x une racine de l'équation

$$\varphi(z) - z = 0;$$

x est ce qu'on appelle un *point limite* de la substitution $\varphi(z)$; on a, pour toutes les valeurs entières, positives ou négatives, de l'indice p,

$$\varphi_p(x) = x. \tag{1}$$

Je supposerai, de plus, toujours, dans la suite, que la fonction $\varphi(z)$ est *régulière* au voisinage du point $z = x$, c'est-à-dire qu'elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - x$ et que l'on a :

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

2° Désignons par $\varphi'_p(z)$ la dérivée de $\varphi_p(z)$; on aura, quel que soit l'entier positif ou négatif p,

$$\varphi'_p(x) = [\varphi'(x)]^p \tag{2}$$

[pourvu que, dans le cas où p est négatif, $\varphi'(x) \neq 0$].

En effet, pour $k = 2$, on a

$$\varphi'_2(z) = \varphi'[\varphi(z)]\,\varphi'(z)$$

et, en faisant $z = x$ et remarquant que

$$\varphi(x) = x,$$
$$\varphi'_2(x) = [\varphi'(x)]^2.$$

Si la loi est vraie pour l'indice p, elle est vraie pour l'indice $p+1$, car

$$\varphi'_{p+1}(z) = \varphi'[\varphi_p(z)]\,\varphi'_p(z)$$

et, en faisant $z = x$, en vertu de l'égalité (1),

$$\varphi'_{p+1}(x) - \varphi'(x)\,\varphi'_p(x) = [\varphi'(x)]^{p+1}.$$

La proposition est donc vraie pour les indices positifs.

D'autre part, on a

$$\varphi[\varphi_{-1}(z)] = z,$$

donc

$$\varphi'[\varphi_{-1}(z)]\,\varphi'_{-1}(x) = 1$$

et, en faisant $z = x$,

$$\varphi'(x)\,\varphi'_{-1}(x) = 1,$$

d'où

$$\varphi'_{-1}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}.$$

La loi s'étend alors, de proche en proche, comme plus haut, aux indices négatifs.

II.

Considérons maintenant la série

$$(3)\quad \begin{cases} \psi(k, z) = z + \dfrac{k}{1}[\varphi(z) - z] + \dfrac{k(k-1)}{1.2}[\varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) + z] + \dots \\ \qquad + \dfrac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!}[\varphi_p(z) - C_p^1\varphi_{p-1}(z) + C_p^2\varphi_{p-2}(z) + \dots + (-1)^p z] + \dots, \end{cases}$$

les coefficients C_p^1, C_p^2, ..., qui figurent dans les crochets, étant les coefficients binominaux. Remarquons, de suite, que cette série peut s'écrire *symboliquement*

$$(4)\quad \begin{cases} \psi(k, z) = z + \dfrac{k}{1}(\varphi - 1)z + \dfrac{k(k-1)}{1.2}(\varphi - 1)^{(2)}z + \dots \\ \qquad + \dfrac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!}(\varphi - 1)^{(p)}z + \dots, \end{cases}$$

à condition de remplacer, dans le développement de la puissance symbolique $(\varphi - 1)^{(p)}z$, l'expression $\varphi^{(q)}z$ par $\varphi_q(z)$. D'ailleurs, cette dernière formule (4) peut encore se condenser, symboliquement, en celle-ci :

$$(5)\qquad \psi(k, z) = [1 + (\varphi - 1)]^{(k)}z.$$

Pour que l'égalité (3), ou les équivalentes (4) et (5), définisse une fonction bien déterminée $\psi(k, z)$, il faut, d'abord, prouver la convergence de la série qui figure dans le second membre et, à cet effet, j'établirai la proposition suivante :

x étant un point limite de la fonction $\varphi(z)$, au voisinage duquel elle

est régulière, tel que l'on ait

$$|\varphi'(x) - 1| < 1,$$

il existe un cercle C_x, de centre x, tel que, pour tout point z situé à l'intérieur de ce cercle, la série (3) soit convergente, quel que soit k.

Prenons le rapport du $(p+1)^{\text{ième}}$ terme de la série (3) au précédent; ce rapport est

$$R_p(z) = \frac{k-p+1}{p} \frac{\varphi_p(z) - C_p^1 \varphi_{p-1}(z) + C_p^2 \varphi_{p-2}(z) - \ldots + (-1)^p z}{\varphi_{p-1}(z) - C_{p-1}^1 \varphi_{p-2}(z) + C_{p-2}^2 \varphi_{p-3}(z) - \ldots + (-1)^{p-1} z},$$

et cherchons d'abord la valeur de ce rapport pour $z = x$. Pour cette valeur, le rapport prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, car

$$\varphi_p(x) = \varphi_{p-1}(x) = \ldots = \varphi(x) = x;$$

nous aurons donc sa valeur en prenant le rapport des dérivées pour $z = x$. Si l'on tient compte des égalités (2), démontrées plus haut, la valeur de ce rapport est donc

$$R_p(x) = \frac{k-p+1}{p} \frac{[\varphi'(x) - 1]^p}{[\varphi'(x) - 1]^{p-1}} = \frac{k-p+1}{p} [\varphi'(x) - 1].$$

Ceci nous prouve, d'abord, que le rapport $R_p(z)$ est, quel que soit p, une fonction régulière de z dans le voisinage du point limite x puisqu'en ce point il a une valeur *finie* et qu'il est le quotient de deux fonctions régulières. La limite de ce rapport, lorsque p croît indéfiniment (limite qui est indépendante de k), est donc, *en général*, une fonction $R(z)$ régulière au voisinage de $z = x$ et la valeur de cette fonction pour $z = x$ est

$$R(x) = \lim_{p=\infty} \left\{ \frac{k-p+1}{p} [\varphi'(x) - 1] \right\} = 1 - \varphi'(x).$$

Si donc on a

$$|\varphi'(x) - 1| < 1,$$

on pourra déterminer un cercle C_x, de centre x, tel que, pour tout point z situé à l'intérieur de ce cercle, le module de $R(z)$ soit assez voisin du module de $R(x)$, c'est-à-dire de $|\varphi'(x) - 1|$, pour être plus petit que 1; pour tous ces points la série (3) sera donc absolument convergente, *quel que soit k*.

Mais il y a plus. La démonstration précédente nous prouve, en effet, que si l'on considère la série déduite de la série (3) en prenant les dérivées de

tous les termes, par rapport à z, et si, dans cette nouvelle série, on prend le rapport du $(p+1)^{\text{ième}}$ terme au précédent, ce rapport a une limite indépendante de k qui est une fonction $S(z)$, régulière au voisinage du point limite, telle que l'on ait

$$S(x) = R(x) = 1 - \varphi'(x).$$

On pourra donc déterminer un second cercle Γ_x, de centre x, de rayon égal ou inférieur à celui de C_x, tel qu'à l'intérieur de ce cercle, et quel que soit k, la série (3) *soit convergente et définisse une fonction $\psi(k, z)$, régulière en z.*

Dans toute la suite, je supposerai qu'on ne considère la fonction $\psi(k, z)$ que pour les valeurs de z situées à l'intérieur du cercle Γ_x dans lequel elle est régulière.

III.

J'établirai d'abord quelques propriétés simples de la fonction $\psi(k, z)$.

1° *x étant le point limite, on a*

(6) $$\psi(k, x) = x.$$

C'est évident, car, comme nous l'avons remarqué plus haut, l'expression $(\varphi - 1)^{(p)} z$ prend, pour $z = x$, la valeur

$$(1-1)^p x = 0 \quad (^1),$$

$\psi(k, x)$ se réduit donc à son premier terme x.

2° *$\psi'(k, z)$ désignant la dérivée de la fonction $\psi(k, z)$, par rapport à z, on a, au point limite x,*

(7) $$\psi'(k, x) = [\varphi'(x)]^k,$$

quel que soit k.

Nous avons vu, en effet, qu'on a toujours pour les valeurs *entières* de l'indice p

$$\varphi'_p(x) = [\varphi'(x)]^p;$$

(1) Ici $(1-1)^p$ désigne une *véritable* puissance. Pour qu'il n'y ait pas de confusion, j'aurai toujours soin de placer les exposants des puissances symboliques entre parenthèses.

or, on a

$$\psi'(k, z) = 1 + \frac{k}{1}[\varphi'(z) - 1] + \frac{k(k-1)}{1.2}[\varphi'(z) - 1]^{(2)} + \ldots$$
$$+ \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}[\varphi'(z) - 1]^{(p)}\ldots,$$

et, pour $z = x$,

$$[\varphi'(z) - 1]^{(p)} = \varphi'_p(z) - C_p^1 \varphi'_{p-1}(z) + C_p^2 \varphi'_{p-2}(z) - \ldots + (-1)^p$$

prend, par suite, la valeur

$$[\varphi'(x)]^p - C_p^1 [\varphi'(x)]^{p-1} + C_p^2 [\varphi'(x)]^{p-2} - \ldots + (-1)^p = [\varphi'(x) - 1]^p.$$

On a donc

$$\psi'(k, x) = 1 + \frac{k}{1}[\varphi'(x) - 1] + \frac{k(k-1)}{1.2}[\varphi'(x) - 1]^2 + \ldots$$
$$+ \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}[\varphi'(x) - 1]^p + \ldots,$$

les puissances étant ici de véritables puissances. Puisque $|\varphi'(x) - 1| < 1$, la série du second membre est convergente et a pour somme

$$\psi'(k, x) = [1 + \varphi'(x) - 1]^k = [\varphi'(x)]^k,$$

quel que soit k.

Ces deux propriétés ne sont, en somme, que l'extension à $\psi(k, z)$ des deux propriétés des fonctions $\varphi_p(z)$ rappelées au n° I.

3° *p étant un entier positif ou nul, on a*

$$\psi(p, z) = \varphi_p(z). \tag{8}$$

Ceci est encore évident, car on a

$$\psi(p, z) = [1 + \varphi - 1]^{(p)} z = \varphi^{(p)} z = \varphi_p(z),$$

puisque p est entier, et en effectuant la puissance symbolique.

4° *p étant un entier positif, on a*

$$\psi[k, \varphi_p(z)] = \psi[k + p, z], \tag{9}$$

quel que soit k (1).

---

(1) Il faut remarquer qu'à cause de l'hypothèse $|\varphi'(x)| < 1$, si z est suffisamment voisin du point x, $\varphi_p(z)$ sera à l'intérieur du cercle Γ_x dans lequel la fonction Ψ est régulière.

Il suffit de prouver la proposition lorsque $p = 1$, car, alors, elle s'étend sans difficulté, de proche en proche, pour $p = 2, 3, 4, \ldots$. Or, on a

$$\psi[k, \varphi(z)] = \varphi(z) + \frac{k}{1}[\varphi_2 - \varphi_1]z + \ldots$$
$$+ \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}[\varphi_{p+1} - C_p^1\varphi_p + C_p^2\varphi_{p-1} - \ldots + (-1)^p\varphi]z + \ldots,$$

et ceci peut s'écrire, symboliquement,

$$\psi[k, \varphi(z)] = \varphi z + \frac{k}{1}[\varphi - 1]\varphi z + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}(\varphi - 1)^p \varphi z + \ldots,$$

ce qui revient à multiplier *symboliquement* par φ.

Pour multiplier symboliquement par φ, on peut multiplier par $1 + \varphi - 1$ et l'on a donc

$$\psi[k, \varphi(z)] = [1 + (\varphi - 1)]^k [1 + (\varphi - 1)]z$$
$$= [1 + (\varphi - 1)]^{(k+1)}z = \psi(k+1, z).$$

5° — *p étant un entier négatif, on a aussi*

$$(10) \qquad \psi(-p, z) = \varphi_{-p}(z),$$

à condition de choisir pour $\varphi_{-1}(z)$ celle des déterminations qui, pour $z = x$, se réduit à x.

On a, en effet, d'après ce qui précède,

$$\psi[-1, \varphi(z)] = \psi[0, z] = z.$$

$\psi(-1, z)$ est donc la fonction inverse de $\varphi(z)$ qui se réduit à x pour $z = x$, en vertu de l'égalité (6). Donc

$$\psi(-1, z) = \varphi_{-1}(z).$$

Plus généralement,

$$\psi[-p, \varphi_p(z)] = \psi[0, z] = z,$$

donc

$$\psi[-p, z] = \varphi_{-p}(z),$$

la détermination de $\varphi_{-p}(z)$ étant telle que, pour $z = x$, $\varphi_{-p}(z)$ se réduise à x.

IV.

Pour terminer, il nous reste à prouver la proposition capitale que voici :

On a, quel que soit k,

$$\varphi[\psi(k, z)] = \psi[k+1, z]. \tag{11}$$

Pour cela, il suffit, à cause de l'égalité (9), de prouver que l'on a

$$\varphi[\psi(k, z)] = \psi[k, \varphi(z)]. \tag{12}$$

Or, les deux membres de cette égalité (12) étant des fonctions régulières au voisinage du point limite x, il suffit de prouver que les deux membres, ainsi que *toutes* leurs dérivées par rapport à z, sont égales pour $z = x$.

On a, en premier lieu,

$$\varphi[\psi(k, x)] = \varphi(x) = x$$

et

$$\psi[k, \varphi(x)] = \psi(k, x) = x,$$

donc

$$\varphi[\psi(k, x)] = \psi[k, \varphi(x)].$$

En second lieu, en vertu des égalités (6) et (7),

$$\varphi'[\psi(k, x)]\,\psi'(k, x) = \varphi'(x)\,[\varphi'(x)]^k = [\varphi'(x)]^{k+1},$$
$$\psi'[k, \varphi(x)]\,\varphi'(x) = [\varphi'(x)]^k\,\varphi'(x) = [\varphi'(x)]^{k+1};$$

donc, encore,

$$\varphi'[\psi(k, x)]\,\psi'(k, x) = \psi'[k, \varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Prenons les dérivées secondes : il faut prouver que

$$\varphi''[\psi(k, x)]\,[\psi'(k, x)]^2 + \varphi'[\psi(k, x)]\,\psi''(k, x)$$
$$= \psi''[k, \varphi(x)]\,[\varphi'(x)]^2 + \psi'[k, \varphi(x)]\,\varphi''(x).$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\varphi'(x) = x', \qquad \varphi''(x) = x'', \qquad \ldots,$$

on doit donc avoir

$$x''x'^{2k} + x'\psi''(k, x) = x'^2\psi''(k, x) + x''x'^k$$

ou

$$\psi''(k, x)(x'^2 - x') = x''(x'^{2k} - x'^k).$$

La relation (12) qu'il s'agit de démontrer étant vraie pour toutes les valeurs entières de k, cette dernière relation, qui en est une conséquence, est vraie pour toutes les fonctions $\varphi_p(z)$; on en conclut que $\psi''(k, x)$ s'obtient en remplaçant dans son développement les expressions

$$\varphi''_p(x) \quad \text{par} \quad \frac{x''(x'^{2p} - x'^p)}{x'^2 - x'},$$

et l'on trouve ainsi

$$\psi''(k, x) = \frac{x''}{x'^2 - x'}[(1 + x'^2 - 1)^k - (1 + x' - 1)^k] = \frac{x''}{x'^2 - x'}(x'^{2k} - x'^k),$$

ce qu'il fallait établir.

Considérons encore les dérivées troisièmes : il faut prouver que

$$\begin{aligned} &\varphi'''[\psi(k, x)][\psi'(k, x)]^3 \\ &\quad + 3\varphi''[\psi(k, x)]\,\psi''(k, x)\,\psi'(k, x) + \varphi'[\psi(k, x)]\,\psi'''(k, x) \\ &= \psi'''[k, \varphi(x)][\varphi'(x)]^3 + 3\psi''[k, \varphi(x)]\,\varphi''(x)\,\varphi'(x) + \psi'[k, \varphi(x)]\,\varphi'''(x). \end{aligned}$$

En remplaçant dans cette expression $\psi(k, x)$, $\psi'(k, x)$, $\psi''(k, x)$ par leurs valeurs et simplifiant, il reste à montrer que

$$\begin{aligned} &\psi'''(k, x)(x'^3 - x')(x'^2 - x') \\ &\quad = x'''(x'^2 - x')(x'^{3k} - x'^k) + 3x''^2(x'^{3k} - x'^{2k+1} - x'^{2k} + x'^k). \end{aligned}$$

Or, cette relation étant vraie pour les valeurs entières de k est vraie pour toutes les fonctions $\varphi_p(z)$; on a donc

$$\varphi'''_p(x) = \frac{x'''(x'^2 - x')(x'^{3p} - x'^p) + 3x''^2(x'^{3p} - x'^{2p+1} - x'^{2p} + x'^p)}{(x'^3 - x')(x'^2 - x')}.$$

En remplaçant dans le développement de $\psi'''(k, x)$ toutes les quantités $\varphi'''_p(x)$ par ces valeurs et faisant la somme, on trouve que la relation proposée est vraie pour $\psi'''(k, x)$.

D'une façon générale, si l'on a démontré la proposition pour la dérivée $q^{\text{ième}}$, $\psi^{(q)}(k, x)$, on la démontrera pour la dérivée $(q+1)^{\text{ième}}$ de la façon suivante : on dérivera $(q+1)$ fois la relation (12) par rapport à z, on y fera $z = x$ et l'on remplacera $\psi(k, x)$, $\psi'(k, x)$, $\psi''(k, x)$, ..., $\psi^{(q)}(k, x)$ par leurs valeurs calculées précédemment en fonction de x', x'', x''', ..., $x^{(q)}$.

L'égalité qu'il s'agira de démontrer prendra alors la forme

$$\psi^{(q+1)}(k, x) = \sum_n F_n(x', x'', \ldots, x^{(q+1)}) x'^{kn},$$

les fonctions $F_n(x', x'', \ldots, x^{(q+1)})$ ne dépendant aucunement de k. Or, la relation (12) étant vraie pour les valeurs entières de k, on aura, quel que soit l'entier p,

$$\varphi_p^{(q+1)}(x) = \sum_n F_n(x', x'', \ldots, x^{(q+1)}) x'^{pn}.$$

En remplaçant les quantités $\varphi_p^{(q+1)}(x)$ par leurs valeurs dans le développement de $\psi^{(q+1)}(k, x)$, on trouve

$$\begin{aligned}\psi^{(q+1)}(k, x) &= \sum_n F_n(x', x'', \ldots, x^{(q+1)})(1 + x'^n - 1)^k \\ &= \sum_n F_n(x', x'', \ldots, x^{(q+1)}) x'^{kn},\end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait établir.

V.

Ces propositions préliminaires nous conduiront maintenant au résultat final.

Considérons, en effet, l'expression $\psi[k, \psi(k', z)]$; c'est une somme de termes de la forme

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}\{\varphi_p[\psi(k', z)] - C_p^1 \varphi_{p-1}[\psi(k', z)] + \ldots + (-1)^p \psi(k', z)\}.$$

Or, de la relation (12) que nous venons d'établir, on déduit, par des applications répétées,

$$\varphi_p[\psi(k', z)] = \psi(k' + p, z),$$

quels que soient k' et l'entier positif p; le terme général peut donc s'écrire

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}[\psi(k'+p, z) - C_p^1 \psi(k'+p-1, z) + \ldots + (-1)^p \psi(k', z)],$$

ou, avec l'écriture symbolique,

$$\begin{aligned}\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}&\{[1 + (\varphi - 1)]^{(k'+p)} \\ &- C_p^1[1 + (\varphi - 1)]^{(k'+p-1)} + \ldots + (-1)^p[1 + (\varphi - 1)]^{(k')}\} z,\end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}\Big\{[1+(\varphi-1)]^{(p)} \\ - C_p^1[1+(\varphi-1)]^{(p-1)}+\ldots+(-1)^p\Big\}[1+(\varphi-1)]^{(k')}z,$$

et enfin

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}(\varphi-1)^{(p)}(1+\varphi-1)^{(k')}z.$$

L'opération de la substitution de $\psi(k', z)$ à z dans $\psi(k, z)$ revient donc à multiplier *symboliquement* chaque terme du développement et, par suite, $\psi(k, z)$ elle-même par $(1+\varphi-1)^{(k')}$; on a donc

$$\psi[k, \psi(k', z)] = [1+(\varphi-1)]^{(k)}[1+(\varphi-1)]^{(k')}z \\ = [1+(\varphi-1)]^{(k+k')}z = \psi(k+k', z),$$

quels que soient k et k'.

En résumé, la fonction $\psi(k, z)$, régulière dans le cercle Γ_x, vérifie bien les deux relations (A) et (B); c'est donc bien *une* fonction *itérée* de $\varphi(z)$. Korkine a d'ailleurs montré (¹) comment, lorsqu'on connaît une solution du problème, on pourra construire toutes les autres.

Remarquons, en terminant, que la démonstration de l'identité (12), au n° IV, donne précisément le calcul, de proche en proche, des coefficients du développement de $\psi(k, z)$ suivant les puissances croissantes de $z-x$ en fonction de $x, x', x'', x''', \ldots$, c'est-à-dire en fonction des coefficients du développement de $\varphi(z)$. Car, si l'on pose

$$\varphi(z) = x + A_1(z-x) + A_2(z-x)^2 + \ldots$$

et

$$\psi(k, x) = x + \alpha_1(z-x) + \alpha_2(z-x)^2 + \ldots,$$

on a généralement

$$A_p = \frac{x^{(p)}}{p!}$$

et

$$\alpha_p = \frac{\psi^{(p)}(k, x)}{p!}.$$

On retrouve les résultats des calculs de Korkine, résultats qui se trouvent ainsi justifiés après coup.

(¹) *Loc. cit.*, p. 234.

SUR UNE CLASSE

PARTICULIÈRE

DE GROUPES HYPERABÉLIENS,

PAR M. HENRY BOURGET,

Aide-Astronome à l'Observatoire de Toulouse.

INTRODUCTION.

Si l'on considère *une* variable complexe ξ, les seules substitutions birationnelles effectuées sur elle sont les transformations linéaires de la forme

$$\left(\xi, \frac{a\xi+b}{c\xi+d}\right),$$

et la théorie des groupes formés par ces substitutions et des fonctions appartenant à ces groupes est contenue tout entière dans les travaux célèbres de MM. Poincaré et Klein.

Les choses se passent autrement dans le domaine de *deux* variables complexes ξ et η. A côté des groupes de substitutions de la forme

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi+b\eta+c}{a''\xi+b''\eta+c''}, \frac{a'\xi+b'\eta+c'}{a''\xi+b''\eta+c''}\right),$$

tout à fait comparables aux groupes fuchsiens et nommés *hyperfuchsiens* par M. Picard, viennent se placer d'autres groupes dont les substitutions, tout en étant birationnelles, ne sont plus forcément linéaires. M. Picard a étudié également une classe de ces groupes qu'il a nommés *groupes hyperabéliens;* dans ce cas, les substitutions sont de l'une ou l'autre des

formes

$$\left(\xi, \eta; \frac{a\xi+b}{c\xi+d}, \frac{l\eta+m}{p\eta+q}\right),$$

$$\left(\xi, \eta; \frac{a\eta+b}{c\eta+d}, \frac{l\xi+m}{p\xi+q}\right).$$

Elles appartiennent, comme on voit, à la catégorie des substitutions quadratiques. Si l'on remarque maintenant que toute substitution birationnelle équivaut à la composition d'un certain nombre de substitutions quadratiques (Nöther), on apercevra immédiatement l'importance de tels groupes dans la théorie générale des groupes de substitutions birationnelles.

C'est ce qui m'a décidé, sur les conseils de M. Picard, à faire une étude plus détaillée d'un groupe hyperabélien particulier, signalé déjà par ce géomètre dans son Mémoire inséré dans le Tome I de la 4e série du *Journal de Liouville,* et antérieurement, dans une Note des *Comptes rendus,* (17 mars 1884).

Ce groupe particulier a une double origine. On peut le faire dériver de la transformation du premier ordre des fonctions abéliennes du second genre telle qu'elle a été exposée par M. Hermite en 1855; d'autre part, on peut le considérer comme isomorphe au groupe des transformations semblables arithmétiques de la forme quaternaire

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4.$$

Nous avons divisé ce travail en trois Parties.

Dans la première, après des généralités sur les groupes de substitutions semblables des formes quadratiques quaternaires et sur l'étude arithmétique de telles formes, nous montrons comment le groupe que nous étudions se place parmi les groupes analogues déjà rencontrés par MM. Goursat et Bianchi.

La seconde Partie est consacrée à l'étude du groupe. Nous commençons par chercher la forme explicite des substitutions; nous démontrons sa discontinuité pour les valeurs imaginaires des variables $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ appartenant au domaine S ($\xi_2 > 0$, $\eta_2 > 0$); nous réduisons ces substitutions à cinq d'entre elles, qu'on peut considérer comme fondamentales et qui présentent une analogie remarquable avec les substitutions fondamentales du groupe modulaire. La théorie de la réduction continuelle de la

forme quadratique quaternaire

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4$$

nous apprend que le domaine fondamental du groupe a un sommet sur la limite du domaine S et nous développons les calculs de réduction, autour de ce sommet dans le cas particulier de $D = 5$. Enfin, nous mettons en évidence une infinité de sous-groupes du groupe considéré, entièrement analogues aux sous-groupes à congruences du groupe modulaire.

Au début de la troisième Partie, nous cherchons comment se comportent vis-à-vis des transformations du groupe, les dix fonctions

$$\vartheta(0, 0 \mid \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

paires à arguments nuls et de cette étude, nous tirons un procédé pour former à l'aide des fonctions ϑ une infinité de fonctions qui se reproduisent par toutes les substitutions du groupe. Nous montrons que les modules de Borchardt ou ceux de Richelot sont des fonctions invariables par des sous-groupes que nous formons.

Enfin, donnant, d'après M. Picard, les propriétés générales des fonctions du groupe, nous terminons en démontrant que, malgré le sommet situé sur la limite du domaine S, trois quelconques de ces fonctions sont liées par une relation algébrique.

Si l'on considère l'étendue de cette question, comparable à l'étude du groupe modulaire, on trouvera ce travail bien incomplet. Pourtant, si l'on y rencontre quelque nouveauté, le mérite en revient à M. Picard que je tiens à remercier ici des bienveillants et précieux conseils qu'il a bien voulu me donner.

Je tiens à remercier également M. Baillaud dont les affectueux encouragements ont rendu ma tâche plus facile, et M. Vessiot de l'intérêt qu'il a constamment porté à mon travail (1).

---

(1) Qu'il me soit permis de remercier également le comité des *Annales* et en particulier son secrétaire, M. Cosserat, des facilités qu'ils m'ont données pour l'insertion de ce travail dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES ET ARITHMÉTIQUES DES SUBSTITUTIONS SEMBLABLES D'UNE FORME.

Généralités sur le groupe algébrique des transformations semblables d'une forme quaternaire.

1. Nous allons considérer, dans ce qui va suivre, une forme quadratique quaternaire à coefficients réels et le groupe des substitutions linéaires à coefficients réels et entiers qui n'altèrent pas la forme quadratique et de déterminant ± 1. Nous nommerons *droite* ou *gauche* une substitution, selon que son déterminant sera $+1$ ou -1.

Soit F la forme donnée et Φ une forme ne contenant que les carrés des variables et dont on puisse déduire F par la substitution linéaire T. Si S désigne une transformation n'altérant pas Φ, la transformée de S par T, $T^{-1}ST$ n'altérera pas F et, réciproquement, à toute transformation n'altérant pas F on peut faire correspondre une transformation qui n'altère pas Φ. Nous pourrons donc raisonner sur la forme Φ (1). Ajoutons encore que, selon l'usage, nous appellerons *substitution semblable de la forme* toute substitution à coefficients réels et de déterminant ± 1 qui n'altère pas cette forme et *substitution semblable arithmétique* une substitution semblable dont les coefficients sont entiers.

2. Considérons maintenant la forme Φ,

$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2,$$

que nous écrivons comme *somme* de carrés, ce qui est toujours possible au point de vue algébrique, et envisageons les substitutions linéaires telles que l'on ait

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \text{const.}$$

---

(1) Il ne faut pas oublier que F peut dériver de Φ d'une infinité de manières. Il est clair que les groupes qu'on étudiera en supposant Φ dérivée de F, d'une manière ou d'une autre, ne seront pas identiques. *Voir*, à ce sujet, POINCARÉ, *Les Fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique* (*Journal de Liouville*, 1887).

On peut toujours supposer que cette constante est égale à 1, en divisant, si cela n'a pas lieu, les variables par un même nombre.

Cela étant, si nous considérons u_1, u_2, u_3, u_4 comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace linéaire à quatre dimensions, nous voyons que la recherche des substitutions semblables de la forme Φ revient à celle des substitutions linéaires orthogonales de l'espace à quatre dimensions.

Faisons la perspective de la sphère

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1,$$

dans l'espace linéaire à trois dimensions $u_4 = 0$, le point de vue étant le point $(0, 0, 0, 1)$. Nous définissons ainsi une transformation du second ordre et si (x, y, z) sont les coordonnées du point de l'espace à trois dimensions qui correspond au point (u_1, u_2, u_3, u_4) de la sphère, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{u_1}{1 - u_4}, \\[2mm] y = \dfrac{u_2}{1 - u_4}, \\[2mm] z = \dfrac{u_3}{1 - u_4}, \end{cases}$$

et

$$(1')\qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \\[2mm] u_2 = \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \\[2mm] u_3 = \dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \\[2mm] u_4 = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}. \end{cases}$$

On reconnaît dans (1′) les formules qui donnent les coordonnées pentasphériques du point ~~x, y, z par rapport aux cinq sphères~~ ou plans,

$$x, \quad y, \quad z, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad i(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = 0,$$

la dernière coordonnée restant constante.

On peut donc dire qu'à toute substitution orthogonale de l'espace à quatre dimensions correspond une substitution linéaire effectuée sur les coordonnées pentasphériques d'un point qui conserve en outre la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0,$$

et inversement.

Remarquons que cette transformation effectuée sur les coordonnées

pentasphériques conserve les angles et transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable. M. Goursat a nommé *isogonale* une telle transformation. Remarquons également que les points de la sphère

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0$$

se correspondent un à un et subissent une transformation linéaire, tandis que les autres points de l'espace à quatre dimensions subissent une transformation du second ordre. Le résultat qui précède, fort précieux, puisqu'il nous permet de nous passer de l'espace à quatre dimensions, est bien connu. Il a été utilisé par M. Poincaré dans sa théorie des groupes fuchsiens et kleinéens et par ceux qui se sont occupés des mêmes questions et a été énoncé explicitement par M. Klein, par M. Goursat et par M. Kœnigs (1).

3. Ce que nous venons de dire est vrai, quels que soient les signes des carrés de la forme Φ, à condition d'introduire les dénominations de la Géométrie non euclidienne; mais, comme les résultats diffèrent notablement suivant le type auquel appartient Φ, il est nécessaire, pour la suite, de distinguer divers cas.

1° Si Φ est du type $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, les transformations isogonales conservent une sphère imaginaire $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ et les groupes formés de transformations semblables sont les groupes étudiés par M. Goursat dans le Mémoire cité plus haut. M. Goursat s'est toutefois borné à l'étude des groupes finis.

2° Si Φ est du type $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$, la quadrique conservée par les substitutions isogonales est une sphère réelle et comme on peut, en appliquant une transformation isogonale convenable, transformer cette sphère en un plan réel, on aperçoit l'identité des groupes rencontrés, avec les groupes kleinéens. M. Bianchi en a d'ailleurs étudié des cas particuliers en se plaçant à ce point de vue (2).

3° Enfin, si Φ est du type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$, la quadrique conservée est

(1) KLEIN, *Programme d'Erlangen* et *M. A.*; t. V. — POINCARÉ, *Notice sur ses travaux scientifiques* et *Act. Mat.*; t. III. — GOURSAT, *Sur les substitutions orthogonales* (*A. E. N.*, 3e série, t. VI; 1889). — KŒNIGS, *Bibliographie de l'espace réglé* (*A. F. T.*, t. VII; 1893).

Indiquons, une fois pour toutes, que nous n'avons pas l'intention de mentionner dans leur ordre tous les Mémoires se rapportant à la question que nous étudions, mais seulement ceux qui nous ont été le plus utile pour notre travail.

(2) BIANCHI, *Math. Ann.*, t. XL, XLII, XLIII; *Annali di Mathem.*, t. XXI, XXIII.

un hyperboloïde réel, qu'on peut également transformer en un plan réel par une substitution isogonale convenable et l'on voit s'introduire des groupes analogues, à ce point de vue, aux groupes kleinéens et que M. Picard ([1]) a étudiés sous le nom de *groupes hyperabéliens*. C'est d'un groupe particulier de cette espèce que nous allons nous occuper ([2]).

4. Utilisant la remarque faite au n° 2 que $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$ se transforme linéairement en elle-même pendant que les points de l'espace à quatre dimensions subissent une transformation du second ordre, nous pouvons, avec M. Goursat, envisager autrement nos substitutions.

Posons

$$u_1 - u_3 = v_1, \qquad -u_1 - u_3 = v_4, \qquad u_2 + u_4 = v_2, \qquad u_2 - u_4 = v_3.$$

Les transformations semblables feront revenir sur elle-même la quadrique

$$v_1 v_4 - v_2 v_3 = 0.$$

M. Goursat ([3]) a démontré qu'en posant

$$\xi = \frac{v_1}{v_3} = \frac{v_2}{v_4}, \qquad \eta = \frac{v_4}{v_3} = \frac{v_2}{v_1},$$

toute transformation semblable correspondait à une transformation de l'une ou l'autre forme

$$\text{(A)} \qquad \left(\xi, \eta; \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{l\eta + m}{p\eta + q}\right),$$

$$\text{(B)} \qquad \left(\xi, \eta; \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \frac{l\xi + m}{p\xi + q}\right).$$

Nous pouvons nous convaincre de ce fait en remarquant que les collinéations qui n'altèrent pas une quadrique

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$$

sont de deux espèces :

([1]) Picard, *Comptes rendus*, 17 mars 1884; *Journal de Liouville*, 4e série, t. I; 1885.

([2]) On voit qu'on passe d'un de ces groupes à l'autre, par des substitutions imaginaires simples. Il semble donc qu'on puisse étudier, d'un même coup, tous ces groupes en partant des substitutions semblables à coefficients complexes.

([3]) Goursat, *Bull. Soc. Math.*, t. XI; 883.

1° Des collinéations droites qui transforment chaque génératrice rectiligne d'un système en une autre génératrice appartenant au même système et qui, par suite, laissent immobiles, sur la quadrique, quatre points, réels ou imaginaires, distincts ou non;

2° Des collinéations gauches, qui permutent les deux systèmes de génératrices rectilignes.

On voit également sans peine que l'ensemble de ces collinéations forme un groupe dans lequel les collinéations droites constituent un sous-groupe invariant d'indice 2.

Parmi les collinéations gauches, remarquons les homologies harmoniques qui sont de période 2 et qui laissent invariables sur la quadrique tous les points de l'intersection de cette quadrique avec le plan d'homologie.

5. Dans l'espace à quatre dimensions introduit plus haut, l'équation

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$$

représente l'intersection de la quadrique

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 1$$

par l'espace linéaire à trois dimensions qui contient les points à l'infini de l'espace à quatre dimensions. Nous pouvons donc imaginer que cette intersection soit la quadrique servant de définition aux longueurs et aux angles de cet espace.

La quadrique se présente alors comme une sphère non euclidienne de rayon 1.

Les substitutions semblables sont des rotations autour de l'origine ou des rotations suivies de symétrie selon qu'elles sont droites ou gauches et enfin les homologies harmoniques sont de simples symétries.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que nous utilisons ici une géométrie non euclidienne à quadrique fondamentale *réelle* et, par suite, appartenant à une classe laissée de côté par M. Klein, signalée par M. Poincaré. On ne doit pas oublier que, dans ce cas, les rotations ont une limite.

6. Dans la suite, nous aurons plus particulièrement à nous occuper de la forme

$$\Phi = u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4,$$

D étant un nombre entier positif. Cette forme est bien réductible au type considéré et l'on voit sans peine que le résultat du n° 4 devient le suivant :

A toute collinéation faisant revenir sur elle-même

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4$$

correspond sur les paramètres ξ, η, définis par les formules

$$\frac{\xi}{u_1 - \sqrt{D}\, u_2} = \frac{\eta}{-u_1 - \sqrt{D}\, u_2} = \frac{\xi\eta}{u_4} = \frac{1}{u_3}$$

ou

$$\frac{u_1}{\xi - \eta} = \frac{u_2}{-\frac{1}{\sqrt{D}}(\xi + \eta)} = \frac{u_3}{2} = \frac{u_4}{2\xi\eta},$$

une transformation de la forme (A) ou de la forme à déterminants $+1$.

Réciproquement, si nous nous donnons une substitution de la forme (A) et si nous cherchons la substitution linéaire correspondante, nous trouvons

$$\begin{aligned}
U_1 &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4,\\
U_2 &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4,\\
U_3 &= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 + \gamma_3 u_3,\\
U_4 &= \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \delta_3 u_3 + \delta_4 u_4,
\end{aligned}$$

avec les valeurs suivantes des coefficients

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \lambda(aq + dl - bp - cm), & \beta_1 &= -\lambda : \sqrt{D}\,(aq + cm - bp - dl),\\
\alpha_2 &= \lambda\sqrt{D}(cm + dl - aq - bp), & \beta_2 &= \lambda(aq + cm + bp + dl),\\
\alpha_3 &= \lambda(bq - dm), & \beta_3 &= -\lambda : \sqrt{D}\,(bq + dm),\\
\alpha_4 &= \lambda(ap - cl), & \beta_4 &= -\lambda : \sqrt{D}(ap + cl),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 2\lambda(cq - dp), & \delta_1 &= 2\lambda(am - bl),\\
\gamma_2 &= -2\lambda\sqrt{D}(cq + dp), & \delta_2 &= -2\lambda\sqrt{D}(am + bl),\\
\gamma_3 &= 2\lambda dq, & \delta_3 &= 2\lambda bm,\\
\gamma_4 &= 2\lambda cp, & \delta_4 &= 2\lambda al,
\end{aligned}$$

où λ a la valeur

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\Delta\Delta_1}},$$

$$\Delta = ad - bc, \qquad \Delta_1 = lq - mp.$$

On voit donc qu'à toute substitution de la forme (A) correspondent deux

substitutions linéaires sur les u_i et que ces substitutions se déduisent l'une de l'autre en changeant u_i en $-u_i$, ce qui était évident *a priori*, car ξ et η ne changent point si l'on change u_i en $-u_i$. De plus, ces deux substitutions ont toutes les deux leurs déterminants égaux à $+1$. Comme une substitution (B) est le produit d'une substitution (A) par la substitution

$$(\xi, \eta; \eta, \xi),$$

laquelle équivaut à la suivante

$$(u_1, -u_1),$$

on en conclut qu'à toute substitution (B) correspondent aussi deux substitutions linéaires gauches ne différant que par le signe de λ.

Substitutions semblables arithmétiques d'une forme à coefficients entiers.

7. Dans tout ce que nous venons de dire, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse que la forme quadratique et les substitutions linéaires ont leurs coefficients entiers. En réalité, les considérations précédentes s'appliquent au groupe algébrique des substitutions qui reproduisent la forme.

L'étude arithmétique de ces substitutions exige de nouveaux principes. Ils ont été posés par M. Hermite dans ses belles études sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres (¹). Cette étude repose tout entière sur l'algorithme particulier que M. Hermite a nommé *réduction continuelle des formes indéfinies*.

M. Picard (²) a montré le grand parti qu'on pouvait tirer de cet algorithme pour la théorie des fonctions en faisant voir qu'il conduisait de la façon la plus naturelle et la plus régulière au domaine fondamental des groupes discontinus que l'on a à envisager. M. Picard a appliqué cette méthode successivement aux formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées, aux formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées, et enfin aux formes quadratiques quaternaires du type qui nous occupe.

(¹) Hermite, *Lettres à Jacobi sur la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. 40); *Mémoire sur la théorie des formes quadratiques* (*Journal de Crelle*, t. 47).

(²) Picard, *Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires* (*Annales de Mathématiques*, t. I); *Sur les formes quadratiques binaires à indéterminations conjuguées* (*Annales de l'École Normale*, 1884); *Sur les formes quadratiques ternaires à indéterminations conjuguées* (*Annales de Mathématiques*, t. V); *Sur les formes quadratiques quaternaires indéfinies* (*Journal de Liouville*, 1885).

8. Dans cette dernière application, M. Picard a écarté dès le début le cas particulier où la forme peut représenter rationnellement o. Ce cas se présente précisément dans la forme signalée plus haut

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4,$$

comme il est facile de s'en convaincre par l'exemple suivant

$$1 - 3.(3)^2 + 2.13 = 0.$$

Il est donc nécessaire, pour pouvoir utiliser la théorie de la réduction continuelle, d'examiner ce cas particulier. C'est ce que nous avons essayé de faire en suivant d'ailleurs la marche adoptée par M. Picard dans le cas particulier analogue des formes ternaires à indéterminées conjuguées. On doit cependant remarquer que les calculs sont plus pénibles dans le cas des formes quaternaires et il nous a été impossible d'aller aussi loin dans les détails.

9. Soit donc une forme indéfinie à coefficients entiers

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 \\ + 2 b_{12} x_1 x_2 + 2 b_{13} x_1 x_3 + 2 b_{14} x_1 x_4 \\ + 2 b_{23} x_2 x_3 + 2 b_{24} x_2 x_4 \\ + 2 b_{34} x_3 x_4, \end{aligned}$$

réductible au type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$ par la substitution

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4, \\ u_2 &= \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 + \delta' x_4, \\ u_3 &= \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 + \delta'' x_4, \\ u_4 &= \alpha''' x_1 + \beta''' x_2 + \gamma''' x_3 + \delta''' x_4. \end{aligned}$$

Conformément à la méthode de M. Hermite, il faut adjoindre à la forme indéfinie

$$f = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

la forme définie

$$\varphi = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2,$$

les U_i étant les fonctions linéaires suivantes

$$U_i = M_i u_1 + P_i u_2 + Q_i u_3 + R_i u_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où les M_i, P_i, Q_i, R_i désignent les coefficients non forcément entiers d'une

substitution qui transforme en elle-même

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

la forme φ contient donc un certain nombre de paramètres variant d'une manière continue. M. Picard a démontré que ces paramètres peuvent se réduire à deux

$$\xi = \xi' + i\xi'', \qquad \eta = \eta' + i\eta'',$$

et que l'on peut ramener φ à la forme

$$\begin{aligned}\varphi = (\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi)(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2)\\ + 2\,\mathfrak{N}[(\eta - \xi)u_1 - (1 + \xi\eta)u_2 + (\eta + \xi)u_3 + (1 - \xi\eta)u_4],\end{aligned}$$

dans laquelle on doit supposer nécessairement

$$(\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi) > 0,$$

ce qui revient à dire que ξ'' et η'' doivent être de même signe, positifs par exemple. Nous désignerons dans la suite le domaine de l'espace à quatre dimensions, dans lequel $\xi'' > 0$ et $\eta'' > 0$ par la lettre S, et sa limite $\xi'' = 0$, $\eta'' = 0$, par (S) la notation $\mathfrak{N}$A désignant la norme de A.

10. En écrivant φ sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + A_4 x_4^2\\ + 2B_{12}x_1x_2 + 2B_{13}x_1x_3 + 2B_{14}x_1x_4\\ + 2B_{23}x_2x_3 + 2B_{24}x_2x_4\\ + 2B_{34}x_3x_4.\end{aligned}$$

M. Picard (¹) a démontré que l'on a les inégalités

$$|a_1| \leqq A_1, \qquad |a_2| \leqq A_2, \qquad |a_3| \leqq A_3, \qquad |a_4| \leqq A_4,$$

$$|a_i a_k - b_{ik}^2| \leqq A_i A_k - B_{ik}^2,$$
$$(i \neq k, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4),$$

$$\begin{aligned}|\text{Discrim.} f(0, x_2, x_3, x_4)| \leqq \text{Discrim.}\ \varphi(0, x_2, x_3, x_4),\\ |\text{Discrim.} f(x_1, 0, x_3, x_4)| \leqq \text{Discrim.}\ \varphi(x_1, 0, x_3, x_4),\\ |\text{Discrim.} f(x_1, x_2, 0, x_4)| \leqq \text{Discrim.}\ \varphi(x_1, x_2, 0, x_4),\\ |\text{Discrim.} f(x_1, x_2, x_3, 0)| \leqq \text{Discrim.}\ \varphi(x_1, x_2, x_3, 0).\end{aligned}$$

(¹) *Journal de Liouville*, 1885.

11. Enfin, nous dirons avec MM. Korkine et Zolotareff qu'une forme quaternaire définie est réduite si on peut l'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned}\mu_1(x_1+\varepsilon_1 x_2+\varepsilon_2 x_3+\varepsilon_3 x_4)^2\\ +\mu_2(x_2+\varepsilon_4 x_3+\varepsilon_5 x_4)^2\\ +\mu_3(x_3+\varepsilon_6 x_4)^2\\ +\mu_4 x_4^2,\end{aligned}$$

dans laquelle les nombres μ_i sont positifs et satisfont aux conditions

$$\mu_2 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_3,$$
$$\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = \Delta,$$

et les ε_i sont positifs ou négatifs, satisfaisant aux conditions

$$|\varepsilon_i| < \tfrac{1}{2}.$$

MM. Korkine et Zolotareff ont démontré que toute forme quaternaire était équivalente arithmétiquement à une telle forme réduite.

De plus, on trouve sans peine

$$\varepsilon_1=\frac{B_{12}}{A_1}, \qquad \varepsilon_2=\frac{B_{13}}{A_1}, \qquad \varepsilon_3=\frac{B_{14}}{A_1},$$

$$\varepsilon_4=\frac{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial B_{23}}}{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}, \qquad \varepsilon_5=\frac{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial B_{23}\,\partial B_{34}}}{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}, \qquad \varepsilon_6=\frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial B_{34}}}{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A_4}},$$

$$\mu_1=A_1, \qquad \mu_2=\frac{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}{A_1}, \qquad \mu_3=\frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A_4}}{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}, \qquad \mu_4=\frac{\Delta}{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A_4}};$$

les conditions

$$\mu_2 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_3$$

peuvent s'écrire

$$A_1A_2 - B_{12}^2 \geqq \tfrac{1}{2}A_1^2,$$

$$A_1\begin{vmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13}\\ B_{12} & A_2 & B_{23}\\ B_{13} & B_{23} & A_3\end{vmatrix} \geqq \tfrac{1}{2}(A_1A_2 - B_{12}^2),$$

$$(A_1A_2 - B_{12}^2)\,\Delta \geqq \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13}\\ B_{12} & A_2 & B_{23}\\ B_{13} & B_{23} & A_3\end{vmatrix}^2.$$

12. Cela étant, considérons la forme définie φ; elle ne sera pas réduite,

en général, et il faudra, pour la réduire, lui appliquer une substitution T; nous dirons que fT est réduite.

φ, étant réduite pour un système de valeurs de ξ et η, ne le sera que pour les valeurs voisines satisfaisant à certaines conditions; en d'autres termes, tant que le point (ξ', ξ''; η', η'') de l'espace à quatre dimensions sera à l'intérieur d'un certain domaine D et si nous imaginons que ce point varie de toutes les manières possibles, il faudra, suivant les régions où il sera, employer telle ou telle substitution pour réduire φ et, par conséquent, la forme indéfinie correspondante f.

L'ensemble de ces opérations de réduction sur la forme f constitue ce que l'on appelle la *réduction continuelle de la forme f*.

Parmi les applications de cette méthode, nous citerons, comme montrant très clairement la marche de cet algorithme, le développement des irrationnelles du troisième degré, fait par M. Charve dans sa Thèse.

Dans ce qui suit, nous ne développerons pas la théorie générale de la réduction continuelle des formes quadratiques quaternaires, qui paraît présenter encore bien des points non éclaircis, mais nous appliquerons à la forme qui nous occupe

$$x_1^2 - Dx_2^2 + x_3x_4$$

l'algorithme de la réduction continuelle.

13. Nous allons seulement démontrer, relativement à la théorie de la réduction continuelle, quelques propositions qui nous seront utiles dans l'exemple que nous voulons traiter. Rappelons d'abord qu'il résulte d'un théorème général énoncé par M. Hermite que *le nombre des formes réduites arithmétiquement équivalentes à une forme indéfinie donnée est fini*.

14. Nous allons démontrer que le domaine D, dans lequel une forme est réduite, ne peut avoir qu'un point commun avec la limite du domaine S, considérée plus haut.

En vertu des inégalités auxquelles sont assujettis les μ_i, on a

$$\mu_1^4 \geqq 2^6 \Delta.$$

Or, le discriminant de la forme φ est, après quelques calculs faciles,

$$\Delta = \delta(\eta - \eta_0)^4(\xi_0 - \xi)^4,$$

δ désignant le discriminant de la forme f. Comme de plus, dans φ, le coefficient de x_1^2 est μ_1, l'inégalité ci-dessus devient

$$(\eta-\eta_0)(\xi_0-\xi)a_1+2\,\mathfrak{M}\,[(\eta-\xi)\alpha-(1+\xi\eta)\alpha'+(\eta+\xi)\alpha''+(1-\xi\eta)\alpha''']$$
$$\leq 2^{\frac{3}{2}}.\delta^{\frac{1}{4}}(\eta-\eta_0)(\xi_0-\xi).$$

Si donc le domaine D a un point commun ξ', η' avec la limite du domaine S, on aura

$$(\eta'-\xi')\alpha-(1+\xi'\eta')\alpha'+(\eta'+\xi')\alpha''+(1-\xi'\eta')\alpha'''=0.$$

D'autre part, si un point variable (ξ, η) se rapproche suivant un chemin quelconque du point (ξ', η'), on voit que l'on a

$$\lim \mu_1 = 0,$$
$$\lim \mu_2 = A_2,$$
$$\lim \mu_3 = A_3 - \frac{B_{23}^2}{A_2};$$

quant à la limite de μ_4, elle ne nous servira pas.

Ces limites sont évidentes si l'on remarque que l'on a

$$\lim A_1 = 0,$$
$$\lim B_{12} = 0,$$
$$\lim B_{13}^2 A_2 = 0,$$

qui se tirent immédiatement des inégalités

$$\mu_{i+1} \geq \tfrac{1}{2}\mu_i.$$

Mais, pour $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, la forme φ se réduit à

$$\begin{aligned}2\{&[(\eta'-\xi')\beta-(1+\xi'\eta')\beta'+(\eta'+\xi')\beta''+(1-\xi'\eta')\beta''']x_2\\ &+[(\eta'-\xi')\gamma-(1+\xi'\eta')\gamma'+(\eta'+\xi')\gamma''+(1-\xi'\eta')\gamma''']x_3\\ &+[(\eta'-\xi')\delta-(1+\xi'\eta')\delta'+(\eta'+\xi')\delta''+(1-\xi'\eta')\delta''']x_4\}^2,\end{aligned}$$

dont le discriminant est nul. On a donc

$$\mu_2\mu_3\mu_4 = 0,$$

ce qui donne

$$\mu_2 = 0,$$

car les hypothèses $\mu_3 = 0$ et μ_4 donnent aussi

$$\mu_2 = 0,$$

par suite des inégalités

$$\mu_3 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_3.$$

Or $\mu_2 = A_2$ dans ce cas; donc A_2 est nul et la forme devient

$$\begin{aligned} 2\{ &[(\eta'-\xi')\gamma - (1+\xi'\eta')\gamma' + (\eta'+\xi')\gamma'' + (1-\xi'\eta')\gamma''']x_3 \\ &+ [(\eta'-\xi')\delta - (1+\xi'\eta')\delta' + (\eta'+\xi')\delta'' + (1-\xi'\eta')\delta''']x_4\}^2, \end{aligned}$$

dont le discriminant est encore nul; on a donc

$$\mu_3\mu_4 = 0;$$

d'où

$$\mu_3 = 0.$$

Or

$$\mu_3 = [(\eta'-\xi')\gamma - (1+\xi'\eta')\gamma' + (\eta'+\xi')\gamma'' + (1-\xi'\eta')\gamma'''].$$

On a donc, en définitive, les deux conditions $\mu_1 = 0$, $\mu_3 = 0$ qui entraînent $\mu_2 = 0$. Elles s'écrivent

$$(\alpha) \qquad (\eta'-\xi')\alpha - (1+\xi'\eta')\alpha' + (\eta'+\xi')\alpha'' + (1-\xi'\eta')\alpha''' = 0,$$

$$(\beta) \qquad (\eta'-\xi')\beta - (1+\xi'\eta')\beta' + (\eta'+\xi')\beta'' + (1-\xi'\eta')\beta''' = 0,$$

$$(\gamma) \qquad (\eta'-\xi')\gamma - (1+\xi'\eta')\gamma' + (\eta'+\xi')\gamma'' + (1-\xi'\eta')\gamma''' = 0.$$

Le point (ξ', η') devra de plus satisfaire à

$$(\xi'_0 - \xi')(\eta' - \eta'_0) = 0.$$

On peut donner une autre forme à ces conditions.

Écrivons les trois premières sous la forme

$$\begin{aligned} p\,\xi'\eta' + q\,\xi' + r\,\eta' + s &= 0, \\ p'\xi'\eta' + q'\xi' + r'\eta' + s' &= 0, \\ p''\xi'\eta' + q''\xi' + r''\eta' + s'' &= 0, \end{aligned}$$

les valeurs des $p, q, r, s, \ldots$ se trouvant aisément.

On tire des deux premières, par exemple,

$$\begin{aligned} (pq'-p'q)\xi'^2 + (ps'-p's+rq'-r'q)\xi' + rs'-r's &= 0, \\ (pr'-p'r)\eta'^2 + (ps'-p's+qr'-q'r)\eta' + qs'-q's &= 0. \end{aligned}$$

Comme les quantités $p, q, r, s, \ldots$ sont réelles, la première équation a pour racines ξ' et ξ'_0, la seconde η' et η'_0, donc la condition

$$(\xi'_0 - \xi')(\eta' - \eta'_0) = 0$$

équivaut à dire que l'une de ces deux équations a une racine double ; la première, par exemple, ce qui donne

$$(ps' - p's + rq' - r'q)^2 - 4(pq' - p'q)(rs' - r's) = 0,$$

qui, calculée, est égale à

$$b_{12}^2 - a_1 a_2 = 0.$$

Si nous écrivons que l'équation en η' a une racine double, nous trouvons la même condition.

Si nous combinons ensemble la première équation (α) avec la troisième (γ), comme nous avons fait pour la première et la seconde, nous ne trouvons

$$b_{13}^2 - a_1 a_3 = 0.$$

D'un autre côté, M. Picard (1) a démontré que, si l'on avait $a_1 \neq 0$, on pouvait avoir

$$(\xi'_0 - \xi')(\eta' - \eta'_0) = 0.$$

Nous concluons donc de là, que les *seules réduites, dont le domaine* D *peut avoir des points communs avec la limite du domaine* S, *sont celles dans lesquelles*

$$a_1 = 0, \qquad b_{12} = 0, \qquad b_{13} = 0,$$

et le domaine D *n'a qu'un point commun, s'il a des points communs avec la limite du domaine* S.

Les coordonnées de ce point dépendent des α, β, γ, ..., c'est-à-dire du mode de réduction de f à la forme canonique.

15. Remarquons aussi que l'existence des réduites dans lesquelles $a_1 = 0$ est entièrement subordonnée au fait qu'il y a un système de nombres entiers qui annulent la forme.

Faisons, en effet, dans f une substitution de déterminant 1 et à coefficients entiers ; le coefficient de x_1^2 dans la transformée de f est

$$f(\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{A}'', \mathrm{A}'''),$$

A, A′, A″, A‴ désignant les coefficients de x_1 dans la substitution. Cette quantité ne peut être nulle que s'il y a un système A, A′, A″, A‴ de nombres entiers annulant la forme.

(1) *Journal de Liouville*, 1885.

Pour s'assurer de l'existence d'un tel système de nombres entiers, il suffit de se reporter à la solution générale de cette question donnée par M. Jordan dans son Mémoire sur les formes quadratiques inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique* [1].

Il nous suffit de savoir que de telles réduites sont possibles, ce que nous avons montré en faisant voir, par un exemple, qu'il peut y avoir un système de nombres entiers rendant la forme égale à zéro.

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXXI.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DU GROUPE.

Recherche des substitutions du groupe, considéré comme sous-groupe du groupe de la transformation des fonctions abéliennes.

16. Arrivons, après ces préliminaires, au groupe particulier dont l'étude est l'objet de ce travail.

Il a son origine dans la théorie de la transformation du premier ordre des fonctions abéliennes de second genre.

M. Hermite [1] a démontré que les transformations du premier ordre effectuées sur les périodes conduisent à un groupe important de substitutions non linéaires sur les périodes des intégrales normales.

Désignant par

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \tau_{11}, & \tau_{12}, \\ 0, & 1, & \tau_{21}, & \tau_{22}, \end{matrix}$$

le tableau des périodes des intégrales normales et posant

$$(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i,$$

ces substitutions sont

$$\tau'_{11} = \frac{(db)_{01} + (db)_{31}\tau_{11} + 2(db)_{03}\tau_{12} + (db)_{02}\tau_{22} + (db)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\tau_{11} + 2(ab)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})},$$

$$\tau'_{12} = \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}\tau_{11} + [(ad)_{03} + (ad)_{21}]\tau_{12} + (ad)_{02}\tau_{22} + (ad)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\tau_{11} + 2(ab)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})},$$

$$\tau'_{22} = \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}\tau_{11} + 2(ac)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ac)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\tau_{11} + 2(ab)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})};$$

les a, b, c, d étant des entiers réels vérifiant le système des six relations

(1) $$(ad)_{03} + (bc)_{03} = 1,$$
(2) $$(ad)_{12} + (bc)_{12} = 1,$$
(3) $$(ad)_{01} + (bc)_{01} = 0,$$
(4) $$(ad)_{02} + (bc)_{02} = 0,$$
(5) $$(ad)_{13} + (bc)_{13} = 0,$$
(6) $$(ad)_{23} + (bc)_{23} = 0,$$

---

[1] HERMITE, *Sur la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus*, t. XL; 1855).

ou le système équivalent :

$$(1') \qquad (ad)_{03} + (ad)_{12} = 1,$$
$$(2') \qquad (bc)_{03} + (bc)_{12} = 1,$$
$$(3') \qquad (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0,$$
$$(4') \qquad (ac)_{03} + (ac)_{12} = 0,$$
$$(5') \qquad (bd)_{03} + (bd)_{12} = 0,$$
$$(6') \qquad (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0,$$

le déterminant de la transformation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

étant d'ailleurs égal à l'unité positive.

Comme nous l'avons remarqué, les substitutions ci-dessus ne sont pas linéaires. M. Picard (¹) a fait voir qu'en fixant la valeur du déterminant

$$\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}$$

égale à un nombre entier positif non carré D, on isolait du groupe précédent, un sous-groupe de nature très remarquable. Posons donc

$$\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22} = D$$

et résolvons cette relation comme il suit :

$$\tau_{11} = -\frac{2\sqrt{D}}{\xi + \eta}, \qquad \tau_{12} = \sqrt{D}\,\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}, \qquad \tau_{22} = \frac{2\sqrt{D}\,\xi\eta}{\xi + \eta},$$

$\sqrt{D}$ désignant la valeur arithmétique du radical, ξ, η étant deux paramètres complexes en général.

Les substitutions sur les τ_{ij} sont devenues linéaires; de plus, par l'introduction des paramètres ξ, η, nous faisons correspondre à ces substitutions des substitutions sur ξ, η. Ce sont ces dernières que nous allons spécialement étudier dans ce Travail.

Nous isolons donc, en définitive, une classe particulière de fonctions abé-

---

(¹) *Comptes rendus*, 1er semestre 1884 et *Journal de Liouville*, 1885.

liennes du second genre et il y a lieu d'étudier, pour cette classe, la transformation des fonctions θ, les fonctions θ à arguments nuls, etc. C'est un point de vue sur lequel M. Hermite a attiré depuis longtemps l'attention et auquel M. Picard (1) s'est placé dans un travail sur les fonctions θ à trois arguments pour obtenir un exemple effectif des plus intéressants de fonctions hyperfuchsiennes.

Tout d'abord les paramètres complexes ont une limitation qui est importante pour la suite.

Posons

$$\tau_{11} = \tau'_{11} + i\tau''_{11}, \qquad \tau_{12} = \tau'_{12} + i\tau''_{12}, \qquad \tau_{22} = \tau'_{22} + i\tau''_{22},$$

on sait qu'on doit avoir

$$\tau''_{11} > 0, \qquad \tau''_{12} > 0, \qquad \tau''^2_{12} - \tau''_{11}\tau''_{22} < 0,$$

posant, en outre,

$$\xi = \xi' + i\xi'', \qquad \eta = \eta' + i\eta'',$$

on trouve sans peine

$$\tau''_{11} = \frac{2\sqrt{D}(\xi'' + \eta'')}{\mathfrak{N}(\xi + \eta)},$$

$$\tau''_{22} = \frac{2\sqrt{D}[\eta''(\xi'^2 + \xi''^2) + \xi''(\eta'^2 + \eta''^2)]}{\mathfrak{N}(\xi + \eta)},$$

$$\tau''_{12} = \frac{2\sqrt{D}(\eta'\xi'' - \xi'\eta'')}{\mathfrak{N}(\xi + \eta)}.$$

De là on tire

$$\tau''^2_{12} - \tau''_{11}\tau''_{22} = \frac{-4D\xi''\eta''}{(\xi' + \eta')^2 + (\xi'' + \eta'')^2};$$

ce qui montre que ξ'' et η'' doivent être de même signe et, comme τ''_{11} et τ''_{22} sont positifs, on en conclut

$$\xi'' > 0, \qquad \eta'' > 0,$$

qui est la limitation annoncée.

17. Cela posé, commençons par chercher l'expression analytique des substitutions du sous-groupe en fonction des coefficients de la transformation a_i, b_i, c_i, d_i.

(1) *Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes* (*Comptes rendus*, 1er semestre; 1883).

M. Picard a fait voir qu'en supposant

$$\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22} = D,$$

on était conduit à adjoindre aux relations (1), (2), (3), (4), (5), (6) les quatre suivantes :

$$(7)\qquad (cd)_{13} = D(ab)_{13},$$

$$(8)\qquad (cd)_{03} = D(ab)_{03},$$

$$(9)\qquad (cd)_{02} = D(ab)_{02},$$

$$(10)\qquad (ab)_{23}D^2 + [(ab)_{01} - (cd)_{23}]D - (cd)_{01} = 0.$$

Nous avons donc seize paramètres a_0, b_0, c_0, d_0, ..., a_3, b_3, c_3, d_3 liés par les dix relations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10).

Nous allons transformer ce système de dix équations en une succession de systèmes équivalents et exprimer finalement les c et les d en fonctions des a et des b qui seront liés par deux relations que nous conserverons.

18. Supposons d_0 et d_3 différents de zéro et $(bd)_{03}$ aussi. Des équations (1), (7), (8), (9), on peut tirer c_0, c_1, c_2, c_3 et les porter dans les équations (3), (4), (5), (6).

Le système (1), ..., (10) est remplacé par le système équivalent

$$(11)\qquad c_0(bd)_{03} = d_0 - d_0(ad)_{03} + b_0 D(ab)_{03},$$

$$(12)\qquad c_1(bd)_{03} = d_1 - d_1(ad)_{03} + \frac{b_3 d_1}{d_3} D(ab)_{03} + \frac{(bd)_{03}}{d_3} D(ab)_{13},$$

$$(13)\qquad c_2(bd)_{03} = d_2 - d_2(ad)_{03} + \frac{b_0 d_2}{d_0} D(ab)_{03} - \frac{(bd)_{03}}{d_0} D(ab)_{02},$$

$$(14)\qquad c_3(bd)_{03} = d_3 - d_3(ad)_{03} + b_3 D(ab)_{03},$$

$$(2)\qquad (ad)_{12} + (bc)_{12} = 1,$$

$$(15)\qquad \left(d_0 - D\frac{b_0 b_3}{d_3}\right)[\ \ a_0(bd)_{13} - a_1(bd)_{03} + a_3(bd)_{01}] + (bd)_{01} = 0,$$

$$(16)\qquad \left(d_0 - D\frac{b_0^2}{d_0}\right)[\ \ a_0(bd)_{23} - a_2(bd)_{03} + a_3(bd)_{02}] + (bd)_{02} = 0,$$

$$(17)\qquad \left(d_3 - D\frac{b_3^2}{d_3}\right)[-a_0(bd)_{13} + a_1(bd)_{03} - a_3(bd)_{01}] + (bd)_{13} = 0,$$

$$(18)\qquad \left(d_3 - D\frac{b_0 b_3}{d_0}\right)[-a_0(bd)_{23} + a_2(bd)_{03} - a_3(bd)_{02}] + (bd)_{23} = 0,$$

$$(10)\qquad (ab)_{23}D^2 + [(ab)_{01} - (cd)_{23}]D - (cd)_{01} = 0.$$

Supposons $d_0 - \mathrm{D}\,\frac{b_0 b_3}{d_3} \neq 0$; en vertu d'hypothèses déjà faites, on en conclut que les facteurs

$$d_0 - \mathrm{D}\,\frac{b_0^2}{d_0} \quad \text{et} \quad d_3 - \mathrm{D}\,\frac{b_3^2}{d_3}$$

sont différents de zéro et on tire des équations (15), (16), (17), (18)

$$d_1 - \mathrm{D}\,\frac{b_1 b_3}{d_3} = 0, \tag{19}$$

$$d_2 - \mathrm{D}\,\frac{b_0 b_2}{d_0} = 0, \tag{20}$$

D'autre part, nous tirons de (15) et (16) pour a_1 et a_2 les expressions

$$a_1 (bd)_{03} = - b_1 + b_1 (ad)_{03} - \frac{\mathrm{D}\, b_1 b_3}{d_3} (ab)_{03}, \tag{21}$$

$$a_2 (bd)_{03} = - b_2 + b_2 (ad)_{03} - \frac{\mathrm{D}\, b_0 b_2}{d_0} (ab)_{03}. \tag{22}$$

Tirons maintenant de (19), (20), (21) et (22) les valeurs de d_1, d_2, a_1 et a_2 et portons-les dans (12), (13) et (2). Nous obtenons

$$c_1 = - \frac{a_3 b_1}{d_3} \mathrm{D}, \tag{23}$$

$$c_2 = - \frac{a_0 b_2}{d_0} \mathrm{D}, \tag{24}$$

$$\mathrm{D} = - \frac{d_0 d_3}{b_1 b_2}, \tag{25}$$

de sorte que le système primitif des dix équations est équivalent au système suivant :

$$(ab)_{23} \mathrm{D}^2 + [(ab)_{01} - (cd)_{23}] \mathrm{D} - (cd)_{01} = 0, \tag{10}$$

$$c_0 (bd)_{03} = d_0 - d_0 (ad)_{03} + b_0 \mathrm{D}\, (ab)_{03}, \tag{11}$$

$$c_3 (bd)_{03} = d_3 - d_3 (ad)_{03} + b_3 \mathrm{D}\, (ab)_{03}, \tag{14}$$

$$d_1 = \mathrm{D}\,\frac{b_1 b_3}{d_3}, \tag{19}$$

$$d_2 = \mathrm{D}\,\frac{b_0 b_2}{d_0}, \tag{20}$$

$$a_1 (bd)_{03} = - b_1 + b_1 (ad)_{03} - \frac{\mathrm{D}\, b_1 b_2}{d_3} (ab)_{03}, \tag{21}$$

$$a_2 (bd)_{03} = - b_2 + b_2 (ad)_{03} - \frac{\mathrm{D}\, b_0 b_2}{d_0} (ab)_{03}, \tag{22}$$

(23) $$c_1 = -\frac{a_3 b_1}{d_3} D,$$

(24) $$c_2 = -\frac{a_0 b_2}{d_0} D,$$

(25) $$D = -\frac{d_0 d_3}{b_1 b_2}.$$

Tirons D de l'équation (25), portons sa valeur dans toutes les autres et portons dans l'équation (10) les valeurs de c_0, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, a_1, a_2. Nous trouvons, par un calcul qui n'a d'autre difficulté que sa longueur,

$$\frac{d_0}{b_1^2 b_2}(b_1^2 - d_3^2) = 0,$$

en supposant b_1 et b_2 différents de zéro, on en tire

(26) $$b_1^2 = d_3^2,$$

et notre système d'équations, suivant que l'on prend

$$b_1 = d_3 \quad \text{ou} \quad b_1 = -d_3,$$

est équivalent à l'un ou à l'autre des deux systèmes suivants :

$$\text{(I)} \left\{ \begin{array}{lll} c_0 = D a_2, & d_0 = -D b_2, & a_1 (bd)_{03} = -d_2 + d_3 (ad)_{03} + \dfrac{b_3 d_0}{b_2}(ab)_{03}, \\ c_1 = -D a_3, & d_1 = D b_3, & a_2 (bd)_{03} = -b_2 + b_2 (ad)_{03} + b_0 (ab)_{03}, \\ c_2 = a_0, & d_2 = -b_0, & \\ c_3 = -a_1, & d_3 = b_1, & \end{array} \right.$$

$$\text{(II)} \left\{ \begin{array}{lll} c_0 = -D a_2, & d_0 = D b_2, & a_1 (bd)_{03} = d_3 - d_3 (ad)_{03} + \dfrac{b_3 d_0}{b_2}(ab)_{03}, \\ c_1 = D a_3, & d_1 = -D b_3, & a_2 (bd)_{03} = -b_2 + b_2 (ad)_{03} - b_0 (ab)_{03}, \\ c_2 = -a_0, & d_2 = b_0, & \\ c_3 = a_1, & d_3 = -b_1. & \end{array} \right.$$

Nous voyons donc, comme conclusion de ce calcul un peu long, il est vrai, mais très simple, qu'on exprime symétriquement les c et les d au moyen des a et des b liés encore par deux relations. Il est inutile d'aller plus loin et d'essayer d'utiliser ces deux relations pour faire disparaître deux coefficients; nous verrons plus loin une interprétation simple des deux relations restantes.

19. Des formules données au n° 16, nous tirons

$$\xi_1 = -\frac{\tau'_{12} + \sqrt{D}}{\tau'_{11}}, \qquad \eta_1 = \frac{\tau'_{12} - \sqrt{D}}{\tau'_{11}}.$$

Dans ces formules, remplaçons τ'_{11}, τ'_{12} par leurs valeurs en fonction de $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, puis $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ par leurs expressions en ξ et η; nous trouvons ainsi

$$\xi_1 = \frac{\alpha\xi\eta + \beta\xi + \gamma\eta + \delta}{\alpha''\xi\eta + \beta''\xi + \gamma''\eta + \delta''}, \qquad \eta_1 = \frac{\alpha'\xi\eta + \beta'\xi + \gamma'\eta + \delta'}{\alpha''\xi\eta + \beta''\xi + \gamma''\eta + \delta''},$$

dans lesquelles, pour abréger l'écriture, on a posé

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= D(ab)_{02} - \sqrt{D}(ad)_{02},\\ 2\beta &= \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} + (ad)_{03} - (ad)_{12}] - [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] - D[(ab)_{03} - (ab)_{12}],\\ 2\gamma &= \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} - (ad)_{03} + (ad)_{12}] - [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] + D[(ab)_{03} - (ab)_{12}],\\ \delta &= D(ab)_{13} - \sqrt{D}(ad)_{13}, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha' &= D(ab)_{02} + \sqrt{D}(ad)_{02},\\ 2\beta' &= \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} - (ad)_{03} + (ad)_{12}] + [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] - D[(ab)_{03} - (ab)_{12}],\\ 2\gamma' &= \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} + (ad)_{03} - (ad)_{12}] + [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] + D[(ab)_{03} - (ab)_{12}],\\ \delta' &= D(ab)_{13} + \sqrt{D}(ad)_{13}, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha'' &= \sqrt{D}(bd)_{02},\\ 2\beta'' &= [(bd)_{01} + D(bd)_{23}] - \sqrt{D}\,[(bd)_{03} - (bd)_{12}],\\ 2\gamma'' &= [(bd)_{01} + D(bd)_{23}] + \sqrt{D}\,[(bd)_{03} - (bd)_{12}],\\ \delta'' &= \sqrt{D}(bd)_{13}. \end{aligned}\right.$$

Si les expressions de ξ_1, η_1 sont linéaires en ξ et η, comme M. Picard l'a démontré, elles contiennent nécessairement au numérateur et au dénominateur un facteur commun. Si donc on multiplie le dénominateur par α'', il s'écrit

$$\alpha''\xi(\alpha''\eta + \beta'') + \alpha''(\gamma''\eta + \delta'')$$

ou

$$\alpha''\eta(\alpha''\xi + \gamma'') + \alpha''(\beta''\xi + \delta'')$$

et l'on doit avoir

$$\alpha''\delta'' = \beta''\gamma'',$$

moyennant quoi on peut l'écrire

$$(\alpha''\eta + \beta'')(\alpha''\eta + \gamma'').$$

Si donc on vérifie que l'on a $\alpha''\delta''=\beta''\gamma''$, on aura trouvé par là même les facteurs. Des procédés analogues donneront les facteurs des deux numérateurs. On vérifie, en effet, sans peine que l'on a bien

$$\alpha\delta=\beta\gamma,\qquad \alpha'\delta'=\beta'\gamma',\qquad \alpha''\delta''=\beta''\gamma'',$$

et l'on trouve que les numérateurs et le dénominateur peuvent s'écrire

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\xi+\gamma)(\alpha\eta+\beta),$$

$$\frac{1}{\alpha'}(\alpha'\xi+\gamma')(\alpha'\eta+\beta'),$$

$$\frac{1}{\alpha''}(\alpha''\xi+\gamma'')(\alpha''\eta+\beta'').$$

Si nous portons maintenant dans les $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ les valeurs a_i, b_i, c_i, d_i, tirées des systèmes (I) ou (II), nous trouvons respectivement les formules suivantes, conclusion de tout ce calcul,

$$\text{(A)}\quad \xi_1=\frac{(a_0-a_2\sqrt{D})\xi-(a_1+a_3\sqrt{D})}{-(b_0-b_2\sqrt{D})\xi+(b_1+b_3\sqrt{D})},\qquad \eta_1=\frac{(a_0+a_2\sqrt{D})\eta+(a_1-a_3\sqrt{D})}{(b_0+b_2\sqrt{D})\eta+(b_1-b_3\sqrt{D})},$$

$$\text{(B)}\quad \xi_1=-\frac{(a_0+a_2\sqrt{D})\eta+(a_1-a_3\sqrt{D})}{(b_0+b_2\sqrt{D})\eta+(b_1-b_3\sqrt{D})},\qquad \eta_1=\frac{(a_0-a_2\sqrt{D})\xi-(a_1+a_3\sqrt{D})}{(b_0-b_2\sqrt{D})\xi-(b_1+b_3\sqrt{D})}.$$

On voit, de plus, sans peine, que les deux relations qui existent dans chaque cas, entre les a et b, peuvent s'écrire

$$\text{(R)}\qquad (ab)_{01}-D(ab)_{23}=1,\qquad (ab)_{12}+(ab)_{03}=0,$$

$$\text{(S)}\qquad (ab)_{01}-D(ab)_{23}=-1,\qquad (ab)_{12}+(ab)_{03}=0,$$

car ces relations ne sont autres, d'après leur origine, que les relations (1) et (3'), dans lesquelles on a porté les valeurs des coefficients, tirées des systèmes (I) ou (II). Remarquons qu'en formant les déterminants des substitutions que nous venons de trouver, on obtient pour (A),

$$\Delta_{\xi_1}=(ab)_{01}-D(ab)_{23}+\sqrt{D}[(ab)_{12}+(ab)_{03}],$$

$$\Delta_{\eta_1}=(ab)_{01}-D(ab)_{23}-\sqrt{D}[(ab)_{12}+(ab)_{03}],$$

et si l'on suppose maintenant que les coefficients de la transformation du premier ordre soient entiers et réels et que D soit un entier, réel, positif

et non carré, les conditions (R) expriment simplement que l'on a

$$\Delta_{\xi_1} = \Delta_{\eta_1} = +1.$$

On verrait de même que, pour la substitution (B), les conditions (S) expriment également que les deux déterminants sont égaux à $+1$.

Cette remarque nous dispense d'exprimer a_1 et a_2 en fonction des autres coefficients. Il suffit d'ajouter, comme on le fait d'habitude, que les substitutions que nous considérons, ont leurs déterminants égaux à l'unité positive.

Discontinuité du groupe.

20. Nous pouvons maintenant établir directement les propriétés de ces substitutions.

Pour les écrire sous une forme plus commode, convenons de désigner le nombre complexe $x + y\sqrt{D}$ par une seule lettre et le nombre conjugué $x - y\sqrt{D}$ par la même lettre affectée de l'indice o.

Moyennant cela, nos substitutions s'écrivent

$$\text{(A)} \qquad \xi_1 = \frac{a_0\xi - b}{-c_0\xi + d}, \qquad \eta_1 = \frac{a\eta + b_0}{c\eta + d_0},$$

$$\text{(B)} \qquad \xi_1 = -\frac{a\eta + b_0}{c\eta + d_0}, \qquad \eta_1 = \frac{a_0\xi - b}{c_0\xi - d}.$$

Considérons les substitutions (A); elles forment un groupe. En effet, l'inverse d'une pareille substitution est

$$\xi = \frac{d\xi_1 + b}{c_0\xi_1 + a_0}, \qquad \eta = \frac{d_0\eta_1 - b_0}{-c\eta_1 + a},$$

c'est-à-dire une substitution de la même forme.

De plus, formons le produit de deux substitutions de cette dernière forme; nous trouvons

$$\xi = \frac{d(d'\xi_2 + b') + b(c'_0\xi_2 + a'_0)}{c_0(d'\xi_2 + b') + a_0(c'_0\xi_2 + a'_0)}, \qquad \eta = \frac{d_0(d'_0\eta_2 - b'_0) - b_0(-c'\eta_2 + a')}{-c(d'_0\eta_2 - b'_0) + a(-c'\eta_2 + a')}$$

ou bien

$$\xi = \frac{D\eta_2 + B}{C_0\eta_2 + A_0}, \qquad \eta = \frac{D_0\eta_2 - B_0}{-C\eta_2 + A},$$

avec les valeurs

$$\begin{aligned} A &= cb'_0 + aa', \\ B &= db' + ba'_0, \\ C &= cd'_0 + ac', \\ D &= dd' + bc'_0. \end{aligned}$$

Donc, les substitutions (A) forment bien un groupe.

Les substitutions (B) ne forment pas de groupe, car le produit de deux telles substitutions est manifestement une substitution (A). Il faut, toutefois, mettre de côté le cas où le groupe ne contiendrait qu'une seule substitution (B). L'ensemble des substitutions (A) et (B) forme un groupe. Dans ce groupe total les substitutions (A) constituent un sous-groupe.

Considérons en particulier, dans le groupe total, la substitution unité et la substitution $(\xi, \eta; \eta, \xi)$, T. Toute substitution du groupe total S pourra s'écrire d'une seule manière, sous la forme

$$A.1 \quad \text{ou} \quad A.T,$$

A étant une substitution (A) selon qu'elle appartiendra au type (A) ou (B) de substitutions. De plus, A et A' étant deux substitutions de la forme A, $A'.AA'^{-1}$ est encore une substitution de cette forme. Donc le sous-groupe constitué par les substitutions (A) est un sous-groupe invariant d'indice 2.

21. Nous allons faire voir de plus, que le groupe formé par ces substitutions est un groupe discontinu.

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer la discontinuité du groupe formé par les substitutions (A).

Considérons la substitution relative à ξ. Écrivons-la sous la forme homogène :

$$\begin{aligned} \rho(\xi'_1 + i\xi''_1) &= \quad (a_0 - a_2\sqrt{D})(\xi' + i\xi'') - (a_1 + a_3\sqrt{D})(\omega' + i\omega''), \\ \rho(\omega'_1 + i\omega''_1) &= -(b_0 - b_2\sqrt{D})(\xi' + i\xi'') + (b_1 + b_3\sqrt{D})(\omega' + i\omega''), \end{aligned}$$

la variable ξ ayant été prise égale à $\dfrac{\xi' + i\xi''}{\omega' + i\omega''}$ et supposons que cette valeur soit telle que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi' + i\xi'' & \omega' + i\omega'' \\ \xi' - i\xi'' & \omega' - i\omega'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Dans le plan de la variable complexe ξ, décrivons autour de la valeur

précédente de ξ un cercle ne coupant pas l'axe des ξ réels. On peut toujours le faire.

Supposons, en outre, que le transformé $\xi_1 = \dfrac{\xi'_1 + i\xi''_1}{\omega'_1 + i\omega''_1}$ tombe à l'intérieur de ce cercle.

Cela étant, effectuons le produit

$$\begin{vmatrix} \xi' + i\xi'' & \omega' + i\omega'' \\ \xi' - i\xi'' & \omega' - i\omega'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 - a_2\sqrt{D} & -(a_1 + a_3\sqrt{D}) \\ -(b_0 - b_2\sqrt{D}) & b_1 + b_2\sqrt{D} \end{vmatrix};$$

comme le second déterminant est égal à 1, le produit est encore égal à Δ et, d'autre part, il est égal à

$$\rho\rho_0\Delta_1,$$

ρ_0 étant ici l'imaginaire conjuguée de ρ et Δ_1 le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \xi'_1 + i\xi''_1 & \omega'_1 + i\omega''_1 \\ \xi'_1 - i\xi''_1 & \omega'_1 - i\omega''_1 \end{vmatrix};$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta_1}(\xi'^2_1 + \xi''^2_1) = \quad & [(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi' - (a_1 + a_3\sqrt{D})\omega']^2 \\ & + [(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi'' - (a_1 + a_3\sqrt{D})\omega'']^2 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta_1}(\omega'^2_1 + \omega''^2_1) = \quad & [-(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi' + (b_1 + b_3\sqrt{D})\omega']^2 \\ & + [-(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi'' + (b_1 + b_3\sqrt{D})\omega'']^2. \end{aligned}$$

Comme le point $\dfrac{\xi'_1 + i\xi''_1}{\omega'_1 + i\omega''_1}$ est supposé à l'intérieur du cercle construit plus haut, $\left|\dfrac{\Delta_1}{\xi'^2_1 + \xi''^2_1}\right|$, $\left|\dfrac{\Delta_1}{\omega'^2_1 + \omega''^2_1}\right|$ ne peuvent dépasser certaines limites. Les premiers membres de ces relations étant limités, les seconds le sont et, par suite, chacune des parties élevées au carré est également limitée et, de plus, comme $\begin{vmatrix} \xi' & \omega' \\ \xi'' & \omega'' \end{vmatrix}$ ne diffère de Δ que par un facteur, on en conclut que les quantités

$$(1) \qquad |a_0 - a_2\sqrt{D}|, \quad |a_1 + a_3\sqrt{D}|, \quad |b_0 - b_2\sqrt{D}|, \quad |b_1 + b_3\sqrt{D}|$$

sont limitées.

Des considérations analogues appliquées à la substitution sur η montrent que les quantités

$$(2) \qquad |a_0 + a_2\sqrt{D}|, \quad |a_1 - a_3\sqrt{D}|, \quad |b_0 - b_2\sqrt{D}|, \quad |b_1 - b_3\sqrt{D}|$$

sont limitées.

Comme, maintenant, parmi les huit quantités (1) et (2), il y a certainement quatre sommes véritables, quels que soient les signes des a et des b, on en conclut que les modules des coefficients :

$$|a_0|,\quad |a_1|,\quad |a_2|,\quad |a_3|,\qquad |b_0|,\quad |b_1|,\quad |b_2|,\quad |b_3|$$

sont limités.

Donc, en résumé, si l'on applique à ξ et à η, *simultanément* les substitutions du groupe A, il n'y a qu'un nombre limité de points transformés d'un point donné à l'intérieur d'un domaine composé de deux cercles de rayon fini tracés autour de ξ et de η et ne coupant pas l'axe des quantités réelles. Donc, le groupe formé par les substitutions (A) est discontinu, résultat trouvé autrement par M. Picard.

Remarquons que, si l'on applique *séparément* et *indépendamment* l'une de l'autre, les deux substitutions sur ξ et sur η, on n'est plus conduit à la même conclusion. Les substitutions sur ξ, d'une part, sur η, d'autre part, engendrent des groupes continus.

Cette remarque est en défaut si D est un carré parfait; dans ce cas, les deux substitutions deviennent à coefficients entiers et le groupe résulte de la substitution de deux groupes modulaires.

Substitutions fondamentales du groupe.

22. Nous nous proposons maintenant de réduire les substitutions (A), de manière à obtenir un système de substitutions fondamentales du groupe.

On est naturellement conduit à essayer une méthode analogue à celle employée pour réduire le groupe modulaire; mais nous avons ici à calculer sur des nombres complexes de la forme

$$a + b\sqrt{D},\qquad D > 0,$$

et l'on sait que l'algorithme d'Euclide ne s'applique plus sans précautions et d'une manière générale. Il vaut donc mieux opérer autrement et faire la réduction sur le groupe de la transformation du premier ordre qui nous a servi de point de départ.

Nous avons vu qu'à toute transformation de la forme

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ Da_2 & -Da_3 & a_0 & -a_1 \\ -Db_2 & Db_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

correspondait *une* substitution, soit de la forme (A), soit de la forme (B), et il est clair qu'inversement à toute substitution (A) ou (B) correspondent *deux* substitutions linéaires à quatre variables, l'une se déduisant de l'autre en changeant les signes des éléments.

En d'autres termes, les deux groupes sont *isomorphes mériédriquement.*

C'est le groupe des substitutions linéaires à quatre variables que nous allons réduire en appliquant une méthode de réduction déjà bien des fois employée.

Partons de la substitution suivante

$$S = \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & -b_3 & -a_3 \\ -b_0 & a_0 & -b_2 & -a_2 \\ -Db_3 & Da_3 & b_1 & a_1 \\ Db_2 & -Da_2 & b_0 & a_0 \end{vmatrix},$$

qui est l'inverse de celle que nous venons d'écrire.

Considérons les substitutions :

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a

$$U^q = \begin{vmatrix} 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V^q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 1 \end{vmatrix}.$$

On voit tout d'abord que les substitutions U, V, U^q, V^q font partie du groupe.

Cela étant, supposons qu'on ait $|a_0| > |b_0|$. Appliquons à S la substitution U^q; nous obtenons

$$SU^q = S' = \begin{vmatrix} b_1 & -(a_1 - qb_1) & -b_3 & -(a_3 - qb_3) \\ -b_0 & a_0 - qb_0 & -b_2 & -(a_2 - qb_2) \\ -Db_3 & D(a_3 - qb_3) & b_1 & a_1 - qb_1 \\ Db_2 & -D(a_2 - qb_2) & b_0 & a_0 - qb_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_1 & -a'_1 & -b'_3 & -a'_3 \\ -b'_0 & a'_0 & -b'_2 & -a'_2 \\ -Db'_3 & Da'_3 & b'_1 & a'_1 \\ b'_2 & -Da'_2 & b'_0 & a'_0 \end{vmatrix}$$

et déterminons q de manière à avoir

$$|a_0 - q b_0| \leqq \tfrac{1}{2} |b_0| \quad \text{ou} \quad |a'_0| \leqq \tfrac{1}{2} |b_0|,$$

ce qui est toujours possible. Nous aurons de la sorte une substitution S′ où l'on aura

$$|a'_0| < |b'_0|.$$

Appliquons à S′ la substitution $V^{q'}$, en déterminant q' de manière à avoir

$$|b'_0 - q' a'_0| \leqq \tfrac{1}{2} |a'_0| \quad \text{ou} \quad |b''_0| \leqq \tfrac{1}{2} |a''_0|.$$

On sera ainsi conduit à une substitution S″ telle que l'on ait

$$|a''_0| > |b''_0|.$$

On appliquera de nouveau à S″ une puissance convenable de U et ainsi de suite; en alternant l'emploi des substitutions U et V, on sera sûrement conduit, après un nombre fini d'opérations, à une substitution du groupe dans laquelle a_0 ou b_0 sera nul. On traitera de la même manière les termes a_1, b_1, puis a_2, b_2 et enfin a_3, b_3; de sorte qu'après un nombre fini d'opérations, on sera conduit à un des seize types suivants possibles *a priori*. (Nous n'écrivons, pour abréger, que les deux dernières colonnes de ces substitutions.)

$$\underset{(1)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(2)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(3)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(4)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(5)}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}};$$

$$\underset{(1')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(2')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(3')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(4')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(5')}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}},$$

$$\underset{(6)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(7)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(8)}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(6')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(7')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(8')}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}.$$

Il reste à examiner si des substitutions de cette nature peuvent satisfaire aux conditions

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} &(ab)_{01} - \mathrm{D}(ab)_{23} = 1,\\ &(ab)_{12} + \ (ab)_{03} = 0, \end{aligned}\right.$$

ce qui va déterminer les valeurs des α et β.

23. Remarquons qu'on peut éliminer (1) et (1′) sans examen, car leur déterminant est nul. En outre, nous voyons qu'on passe d'une substitution à numéro d'ordre non accentué à la substitution de même numéro accentué, en appliquant la substitution du groupe

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Il nous reste à examiner à part les sept types (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8).

Type (2).

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} &\beta_1\alpha_0 = 1,\\ &\beta_3\alpha_0 = 0, \end{aligned}\right. \qquad \text{d'où} \qquad \beta_3 = 0, \qquad \alpha_0 = \pm 1, \qquad \beta_1 = \pm 1;$$

elle est donc

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \pm 1 & \beta_2 & 0\\ 0 & 0 & \pm 1 & 0\\ -\mathrm{D}\beta_2 & 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix}.$$

Type (3).

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} -&\alpha_1\beta_0 = 1,\\ &\alpha_1\beta_2 = 0, \end{aligned}\right. \qquad \text{d'où} \qquad \beta_2 = 0, \qquad \beta_0 = \pm 1, \qquad \alpha_1 = \mp 1;$$

elle devient

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \pm 1 & \beta_3 & 0\\ \mp 1 & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{D}\beta_3 & 0 & 0 & \mp 1\\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \end{vmatrix},$$

Type (4).

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{cases} -\mathrm{D}\alpha_2\beta_3 = 1, & \text{d'où}\quad \mathrm{D} = \pm 1,\\ \beta_1\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Elle est donc à rejeter.

Type (5).

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{cases} \mathrm{D}\beta_2\alpha_3 = 1,\\ \beta_0\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

elle est à rejeter pour les mêmes raisons que la précédente.

Type (6).

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{cases} 0 = 1,\\ \beta_2\alpha_1 + \beta_3\alpha_0 = 0, \end{cases}$$

elle est à rejeter.

Type (7).

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{cases} \beta_1\alpha_0 - \mathrm{D}\beta_3\alpha_2 = 1,\\ \beta_1\alpha_2 = \beta_3\alpha_0. \end{cases}$$

On en tire $\beta_1 = \rho\alpha_0$, $\beta_3 = \rho\alpha_2$ et $\rho(\alpha_0^2 - \mathrm{D}\alpha_2^2) = 1$. Mais le déterminant est $\rho^2(\alpha_0^2 - \mathrm{D}\alpha_2^2)^2$; donc on en conclut $\rho = \pm 1$: par suite

$$\beta_1 = \pm\alpha_0,\qquad \beta_3 = \pm\alpha_2\qquad \text{avec}\qquad \alpha_0^2 - \mathrm{D}\alpha_2^2 = \pm 1.$$

La substitution peut donc s'écrire

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \pm\alpha_0 & 0 & \pm\alpha_2 & 0\\ 0 & \alpha_0 & 0 & \alpha_2\\ \pm\mathrm{D}\alpha_2 & 0 & \pm\alpha_0 & 0\\ 0 & \mathrm{D}\alpha_2 & 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}$$

avec

$$\alpha_0^2 - \mathrm{D}\alpha_2^2 = \pm 1.$$

On doit toujours prendre le signe $+$, car autrement le déterminant de la substitution semblable serait -1.

Type (8).

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{cases} \beta_1\alpha_0 + \mathrm{D}\beta_2\alpha_3 = 1,\\ 0 = 0. \end{cases}$$

Elle est à garder.

24. Nous pouvons aller plus loin.

Si, dans la substitution du type (2), nous prenons le signe $+$, nous voyons qu'elle peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\beta_1},$$

et si l'on prend le signe $-$, on a la décomposition

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\beta_1-1},$$

Donc, en définitive, la substitution (2) se ramène aux deux suivantes et à leurs inverses

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

De même, dans la substitution du type (3), en prenant successivement les signes $+$ et $-$, on a les décompositions, aisées à vérifier,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\beta_1},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

de sorte que le type (3) se réduit aux substitutions déjà trouvées et aux deux précédentes et à leurs inverses.

Nous voyons donc que nos substitutions peuvent se former en composant

entre elles et avec (7) et (8) les substitutions suivantes et leurs inverses

$$U=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad V=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad W=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$C=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Or, il est aisé de voir que ces substitutions ne sont pas indépendantes et que l'on a

$$UW^{-1}U = V,$$

puis

$$W^4 = 1,$$
$$CA^{-1} = W,$$
$$CB = W^{-1},$$
$$DA = W^{-1},$$
$$AB = W^2,$$
$$AB = BA,$$

d'où nous tirons

$$V = UW^{-1}U,$$
$$A = W^{-1}C,$$
$$B = C^{-1}W^{-1},$$
$$D = W^{-1}C^{-1}W$$

et

$$C^{-1}W^2CW^2 = 1.$$

Donc il suffit de considérer les substitutions U, W, C et (7) et (8), qui ne comprennent pas d'ailleurs U, W, C comme cas particuliers.

25. Si nous formons maintenant les substitutions de la forme (A) correspondantes, nous trouvons les résultats suivants :

à U correspond la substitution

$$(\xi,\ \eta;\ \xi+1,\ \eta-1).$$

à W correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ -\frac{1}{\xi},\ -\frac{1}{\eta}\right),$$

et à C correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{-1}{\xi+\sqrt{D}},\ \frac{-1}{\eta+\sqrt{D}}\right),$$

à la substitution (7) correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ \pm\frac{\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}\xi,\ \pm\frac{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D}}\eta\right),$$

mais

$$\pm\frac{\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}=(\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D})^2, \qquad \pm\frac{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}=(\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D})^2;$$

comme, d'autre part, on obtient toutes les solutions de l'équation de Pell en employant l'identité

$$x\pm y\sqrt{D}=(a\pm c\sqrt{D})^n \qquad (n \text{ q. c. q. entier}),$$

a et c désignant les plus petites solutions entières, on en conclut que la substitution (7) revient à la suivante

$$[\xi,\ \eta;\ (a+c\sqrt{D})\xi,\ (a-c\sqrt{D})\eta].$$

Enfin, à la substitution (8) correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{\alpha_0\xi+\alpha_3\sqrt{D}}{-\beta_2\sqrt{D}\xi+\beta_1},\ \frac{\alpha_0\eta+\alpha_3\sqrt{D}}{-\beta_2\sqrt{D}\eta+\beta_1}\right)$$

avec la condition

$$\alpha_0\beta_1+\alpha_3\beta_2 D=1,$$

qui exprime que le déterminant est égal à $+1$.

Sous cette forme, une réduction nous apparaît encore; multiplions, en effet, notre substitution par la suivante,

$$(a) \qquad \begin{vmatrix} 1 & -m\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

qui est de la forme (8) et supposons $|\alpha_3| > |\alpha_0|$; nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & (\alpha_3 - m\alpha_0)\sqrt{D} \\ -\beta_2\sqrt{D} & Dm\beta_2 + \beta_1 \end{vmatrix}$$

et choisissons m de manière que l'on ait

$$|\alpha_3 - m\alpha_0| \leqq \tfrac{1}{2}|\alpha_0|;$$

la substitution devient

$$\begin{vmatrix} \alpha'_0 & \alpha'_3\sqrt{D} \\ -\beta'_2\sqrt{D} & \beta'_1 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad |\alpha'_3| < |\alpha'_0|.$$

Appliquons à cette dernière la substitution

(b) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -m'\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix},$$

en déterminant m' par la condition

$$|\alpha'_0 - m'\alpha'_3| \leqq \tfrac{1}{2}|\alpha'_3|,$$

et ainsi de suite; appliquons alternativement les substitutions (a) et (b); nous arriverons, après un nombre fini d'opérations, à l'un ou à l'autre des deux types,

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3^{(n)}\sqrt{D} \\ -\beta_2^{(n)}\sqrt{D} & \beta_1^{(n)} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_0^{(n)} & 0 \\ -\beta_2^{(n)}\sqrt{D} & \beta_1^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Le premier est à rejeter, comme donnant $D = \pm 1$; quant au second, il donne immédiatement $\alpha_0^{(n)} = \pm 1$ et $\beta_1^{(n)} = \pm 1$; de sorte que nous avons, pour obtenir la substitution correspondant à (8), à composer les trois suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & -m\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -m\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -m\sqrt{D} & -1 \end{vmatrix}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\begin{vmatrix} 1 & -m\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^m,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -m\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix}^m,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -m\sqrt{D} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{D} & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix}^{-(m-1)},$$

c'est-à-dire qu'on est ramené aux trois suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad (\xi, \eta;\ \xi-\sqrt{D},\ \eta-\sqrt{D}),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\xi, \eta;\ \frac{\xi}{-\sqrt{D}\,\xi+1},\ \frac{\eta}{-\sqrt{D}\,\eta+1}\right),$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{D} & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\xi, \eta;\ \frac{\xi}{\sqrt{D}\,\xi+1},\ \frac{\eta}{\sqrt{D}\,\eta+1}\right),$$

de sorte qu'en définitive, le groupe résulte des substitutions suivantes

$$(\xi, \eta;\ \xi+1,\ \eta-1),$$
$$\left(\xi, \eta;\ -\frac{1}{\xi},\ -\frac{1}{\eta}\right),$$
$$(\xi, \eta;\ \xi-\sqrt{D},\ \eta-\sqrt{D}),$$
$$[\xi, \eta;\ (a-c\sqrt{D})\xi,\ (a+c\sqrt{D})\eta] \quad \text{avec} \quad a^2-c^2D=1,$$

auxquelles il faut ajouter, si l'on veut comprendre le groupe total des substitutions (A) et (B)

$$(\xi, \eta;\ \eta,\ \xi).$$

Nous poserons, pour abréger le langage dans la suite,

$$\alpha = (\xi, \eta;\ \xi+1,\ \eta-1),$$
$$\beta = (\xi, \eta;\ \xi-\sqrt{D},\ \eta-\sqrt{D}),$$
$$\gamma = \left(\xi, \eta;\ -\frac{1}{\xi},\ -\frac{1}{\eta}\right),$$
$$\delta = [\xi, \eta;\ (a+c\sqrt{D})\xi,\ (a-c\sqrt{D})\eta], \quad a^2-Dc^2=1,$$
$$\varepsilon = (\xi, \eta;\ \eta,\ \xi).$$

Remarquons, en passant, que nous démontrons un résultat énoncé par M. Picard dans son Mémoire couronné *Sur les fonctions de deux variables,* à savoir qu'on obtient un groupe discontinu de substitutions entières, en prenant le groupe admettant pour substitutions fondamentales

$$\alpha,\ \beta,\ \delta.$$

Recherche des substitutions du groupe, considérées comme substitutions semblables d'une forme quadratique.

26. Nous avons défini le groupe que nous étudions en montrant sa liaison analytique avec le groupe des transformations du premier ordre

Particularités du domaine fondamental du groupe déduites de la réduction continuelle.

29. Essayons maintenant d'appliquer à la forme quadratique qui nous intéresse l'algorithme de la réduction continuelle et de voir quels renseignements nous pouvons en tirer relativement au domaine fondamental du groupe.

Ce que nous avons dit sur les réduites à la fin de la première Partie de ce Travail nous conduit à envisager, à la place de la forme

$$u_1^2 - \mathrm{D}\, u_2^2 + u_3 u_4,$$

la forme

$$u_3^2 - \mathrm{D}\, u_2^2 + u_1 u_4,$$

dans laquelle

$$a_1 = 0, \qquad b_{12} = 0, \qquad b_{13} = 0,$$

et qui peut, par suite, avoir un point commun avec la limite du domaine S.

Si nous calculons, pour cette forme, les coefficients de la forme définie associée, nous trouvons sans peine

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1 &= 2,\\
\mathrm{A}_2 &= \mathrm{D}[2\xi\xi_0 + 2\eta\eta_0 + (\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0)],\\
\mathrm{A}_3 &= 2\xi\xi_0 + 2\eta\eta_0 - (\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0),\\
\mathrm{A}_4 &= 2\xi\xi_0\eta\eta_0,\\
\mathrm{B}_{12} &= -\sqrt{\mathrm{D}}(\xi+\xi_0+\eta+\eta_0),\\
\mathrm{B}_{13} &= \xi+\xi_0 - \eta - \eta_0,\\
\mathrm{B}_{14} &= \tfrac{1}{2}(\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0),\\
\mathrm{B}_{23} &= -2\sqrt{\mathrm{D}}(\xi\xi_0 - \eta\eta_0),\\
\mathrm{B}_{24} &= -\sqrt{\mathrm{D}}[\xi\xi_0(\eta+\eta_0) + \eta\eta_0(\xi+\xi_0)],\\
\mathrm{B}_{34} &= [\xi\xi_0(\eta+\eta_0) - \eta\eta_0(\xi+\xi_0)].
\end{aligned}$$

Si nous mettons cette forme définie

$$(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4;\ \mathrm{B}_{12}, \mathrm{B}_{13}, \mathrm{B}_{14}, \mathrm{B}_{23}, \mathrm{B}_{24}, \mathrm{B}_{34})$$

sous la forme de MM. Korkine et Zolotareff, il vient, par des calculs qui

n'ont d'autre difficulté que leur longueur,

$$\varepsilon_1 = -\frac{\sqrt{D}}{2}(\xi+\xi_0+\eta+\eta_0), \qquad \mu_1 = 2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\xi+\xi_0-\eta-\eta_0), \qquad \mu_2 = -\frac{D}{2}[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{4}(\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0), \qquad \mu_3 = -2\frac{(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2}{(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{(\xi_0-\xi)^2-(\eta-\eta_0)^2}{(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2}, \qquad \mu_4 = \frac{1}{2}(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2,$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{1}{2\sqrt{D}}\frac{(\eta+\eta_0)(\xi_0-\xi)^2+(\xi+\xi_0)(\eta-\eta_0)^2}{(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_6 = -\tfrac{1}{4}(\xi+\xi_0-\eta-\eta_0);$$

on en tire

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{D}{4}[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2],$$

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{4}{D}\frac{(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2}{[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2]^2},$$

$$\frac{\mu_4}{\mu_3} = -\frac{1}{4}[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2].$$

Comme on doit avoir, pour que la forme soit réduite, $\frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \frac{1}{2}$, on en conclut

$$\frac{4}{D}\frac{(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2}{[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2]^2} \geqq \frac{1}{2};$$

mais, d'autre part, on a, pour toutes les valeurs de ξ, η,

$$4\frac{(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2}{[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2]^2} < 1;$$

on devrait donc avoir

$$\frac{D}{2} \leqq 1 \qquad \text{ou} \qquad D \leqq 2,$$

ce qui n'arrive pas en général; donc la forme dont on est parti

$$u_3^2 - D u_2^2 + x_1 x_4$$

n'est réduite pour aucune valeur de ξ, η, ce qui nous montre en passant que *les conditions du n° 14 ne sont pas suffisantes*. Si on veut la réduire, il faut faire une substitution linéaire qui change en quelque manière les quan-

tités μ_i, ce qui est mal commode, et nous sommes conduit à changer de forme de départ.

30. Faisons dans f la substitution

$$\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1,\ \frac{x_2}{\sqrt{D}},\ x_3\sqrt{D},\ x_4\right);$$

la forme devient

$$Dx_3^2 - x_2^2 + x_1x_4 = -(x_2^2 - Dx_3^2 - x_1x_4) = -\varphi,$$

ce qui montre qu'on obtient $-\varphi$ en faisant dans f la substitution entière de déterminant $+1$

$$T = (x_1, x_2, x_3, x_4; x_1, x_3, x_2, -x_4).$$

A toute substitution semblable S de φ correspond une substitution semblable TST^{-1} de f et inversement à toute substitution semblable de f, Σ, correspond la substitution semblable de φ, $T^{-1}\Sigma T$.

Donc, au point de vue de notre groupe, nous pouvons raisonner sur la forme φ. Or, si nous faisons la première substitution qui nous a donné $-\varphi$ sur f, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mu_1\left(x_1 + \varepsilon_1\frac{x_2}{\sqrt{D}} + \varepsilon_2\sqrt{D}x_3 + \varepsilon_3x_4\right)^2&\\ + \mu_2\left(\frac{x_2}{\sqrt{D}} + \varepsilon_4\sqrt{D}x_3 + \varepsilon_5x_4\right)^2&\\ + \mu_3(x_3\sqrt{D} + \varepsilon_6x_4)^2&\\ + \mu_4x_4^2&,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}-\varphi = \mu_1\left(x_1 + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{D}}x_2 + \varepsilon_2\sqrt{D}x_3 + \varepsilon_3x_4\right)^2&\\ + \frac{\mu_2}{\sqrt{D}}(x_2 + \varepsilon_4Dx_3 + \varepsilon_5\sqrt{D}x_4)^2&\\ + \mu_3D\left(x_3 + \frac{\varepsilon_6}{\sqrt{D}}x_4\right)^2&\\ + \mu_4x_4^2&,\end{aligned}$$

et il se trouve que les nouvelles valeurs des coefficients μ_i sont encore entières.

Or, pour cette dernière forme φ, nous avons les coefficients

$$\varepsilon_1 = -\tfrac{1}{2}(\xi + \xi_0 + \eta + \eta_0), \qquad \mu_1 = -2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{D}}{2}(\xi + \xi_0 - \eta - \eta_0), \qquad \mu_2 = \frac{1}{2}[(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{4}(\xi + \xi_0)(\eta + \eta_0), \qquad \mu_3 = 2D\frac{(\xi_0 - \xi)^2(\eta - \eta_0)^2}{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_4 = -\sqrt{D}\frac{(\xi_0 - \xi)^2 - (\eta - \eta_0)^2}{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2}, \qquad \mu_4 = -\frac{1}{2}(\xi_0 - \xi)^2(\eta - \eta_0)^2,$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{1}{2}\frac{(\eta + \eta_0)(\xi_0 - \xi)^2 + (\xi + \xi_0)(\eta - \eta_0)^2}{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_6 = -\frac{1}{4\sqrt{D}}(\xi + \xi_0 - \eta - \eta_0),$$

expressions qui se simplifient en posant

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2,$$
$$\eta = \eta_1 + i\eta_2,$$

et qui deviennent

$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1), \qquad \frac{\mu_2}{\mu_1} = \xi_2^2 + \eta_2^2,$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1), \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} = 4D\frac{\xi_2^2\eta_2^2}{(\xi_2^2 + \eta_2^2)^2},$$

$$\varepsilon_3 = \xi_1\eta_1, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} = \frac{1}{D}(\xi_2^2 + \eta_2^2),$$

$$\varepsilon_4 = -\sqrt{D}\frac{\xi_2^2 - \eta_2^2}{\xi_2^2 + \eta_2^2},$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{\eta_1\xi_2^2 + \xi_1\eta_2^2}{\xi_2^2 + \eta_2^2},$$

$$\varepsilon_6 = -\frac{1}{2\sqrt{D}}(\xi_1 - \eta_1).$$

31. Le problème qui va nous occuper est donc la réduction continuelle de la forme

$$x_2^2 - Dx_3^2 - x_1x_4.$$

Remarquons avant tout qu'il y a des valeurs de ξ_2, η_2 aussi grandes qu'on veut qui satisfont aux conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} \geqq \frac{1}{2}$$

pour la première et la dernière inégalité; le fait est évident. Pour la seconde, il suffit de choisir une valeur de $\zeta^2 = \left(\frac{\xi_2}{\eta_2}\right)^2$ qui satisfasse à l'inégalité

$$\zeta^4 + (2 - 8D)\zeta^2 + 1 < 0;$$

il faut donc que ξ_2^2 et η_2^2 croissent sans limite de façon que leur rapport ζ^2 soit compris entre les racines de l'équation

$$X^2 - 2(4D - 1)X + 1 = 0,$$

racines qui sont toujours réelles et égales à

$$4D - 1 \pm 2\sqrt{2D(2D - 1)}.$$

Remarquons également que de pareilles valeurs infiniment grandes de ξ_2 et η_2 sont compatibles avec la condition

$$|\varepsilon_4| < \frac{1}{2}$$

ou

$$-\frac{1}{2} < \sqrt{D}\frac{\eta_2^2 - \xi_2^2}{\eta_2^2 + \xi_2^2} < \frac{1}{2},$$

ou bien

$$-\frac{1}{2} < \sqrt{D}\frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} < \frac{1}{2},$$

car cette dernière exige que l'on ait

$$\frac{2\sqrt{D} - 1}{2\sqrt{D} + 1} < \zeta^2 < \frac{2\sqrt{D} + 1}{2\sqrt{D} - 1};$$

or ces deux limites de ζ^2 sont comprises dans l'intervalle des racines de l'équation ci-dessus en X.

Donc notre assertion est confirmée; il y a des valeurs infiniment grandes de ξ_2 et η_2 satisfaisant aux inégalités de la réduction en ce qui concerne les nombres μ_i et $|\varepsilon_4| < \frac{1}{2}$.

Ceci nous montre que le domaine D de réduction a un point commun avec la limite du domaine S à l'infini qui est entièrement analogue au point à l'infini du domaine fondamental du groupe modulaire. Il résulte de cette analyse qu'il ne peut avoir que ce point commun.

Enfin, remarquons encore que, sauf les conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \frac{1}{2},$$

toutes les autres conditions de la réduction ne dépendent que des variables

$$\xi_1, \qquad \eta_1, \qquad \zeta = \frac{\xi_2}{\eta_2},$$

car on a

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = 4\,\mathrm{D}\,\frac{\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2},$$

$$\varepsilon_4 = +\sqrt{\mathrm{D}}\,\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2},$$

$$\varepsilon_3 = -\,\frac{\eta_1\zeta^2+\xi_1}{1+\zeta^2}.$$

Il résulte de là la conséquence importante que, si nous réduisons la forme en supposant les conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} \geqq \tfrac{1}{2},$$

toujours satisfaites pour le point variable $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$, nous n'avons en définitive que trois paramètres ξ_1, η_1, ζ^2; fait analytique qui nous dispense d'employer l'espace à quatre dimensions comme espace représentatif de la réduction continuelle et nous permet de rester dans un espace à trois dimensions.

C'est un fait analogue au fait qui se passe dans le groupe modulaire. Si l'on est en dehors du cercle $x^2+y^2-1=0$ suffisamment loin de l'origine, le domaine fondamental est une bande parallèle à Oy et, par suite, les limitations de ce domaine ne dépendent pas de la variable y.

32. Toutes ces remarques étant faites, voici comment nous allons faire la réduction continuelle.

Nous allons supposer que ξ_2 et η_2 sont infiniment grands et de telle sorte que leur rapport $\frac{\xi_2}{\eta_2} = \zeta$ et elles-mêmes satisfassent toujours aux conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} > \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} > \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} > \tfrac{1}{2},$$

et nous allons faire varier ξ_1, η_1, ζ de toutes les manières possibles. En d'autres termes, nous ne réduisons la forme que pour les valeurs de $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ avoisinant le point à l'infini du domaine S, et nous allons chercher toutes les réduites dont les domaines de réduction admettent ce point.

Nous donnerons une valeur fixe à ζ et nous réduirons la forme pour

toutes les valeurs de ξ_1 et η_1. Nous obtiendrons ainsi une division régulière du plan des ξ_1 et η_1. Nous ferons ensuite varier ζ dans les limites où il peut varier et nous verrons comment se déforme cette division régulière dans l'espace à trois dimensions (ξ_1, η_1, ζ).

33. Commençons par le cas très simple où $\zeta^2 = 1$; on a alors comme conditions de réduction de la forme

$$f_0 = x_2^2 - \mathrm{D}x_3^2 - x_1 x_4,$$

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2} &< -(\xi_1+\eta_1) &< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< \sqrt{\mathrm{D}}(\xi_1-\eta_1) &< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< \xi_1\eta_1 &< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< -\frac{\xi_1+\eta_1}{2} &< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< -\frac{\xi_1-\eta_1}{2\sqrt{\mathrm{D}}} &< \tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

qui nous montrent que la forme est réduite dans le rectangle dont les côtés ont pour équations

$$\xi_1+\eta_1 = \pm\tfrac{1}{2}, \qquad \xi_1-\eta_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{D}}},$$

domaine que nous désignerons par d_0.

Sortons de d_0 par le côté

$$\xi_1+\eta_1 = \tfrac{1}{2},$$

on a

$$\varepsilon_1 < 0, \qquad |\varepsilon_1| > \tfrac{1}{2}.$$

La substitution

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1+x_2,\ x_2,\ x_3,\ x_4),$$

qui remplace ε_1 par ε_1+1, réduit la forme et donne

$$f_1 = x_2^2 - \mathrm{D}x_3^2 - (x_1+x_2)x_4,$$

avec les conditions de réduction

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2} &< -(\xi_1+\eta_1)+1 &< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< \sqrt{\mathrm{D}}(\xi_1-\eta_1) &< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< \xi_1\eta_1 &< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< -\frac{\xi_1+\eta_1}{2} &< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< -\frac{\xi_1-\eta_1}{2\sqrt{\mathrm{D}}} &< \tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

qui nous montrent que la forme est réduite dans le rectangle formé par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \tfrac{1}{2},\ 1, \qquad \xi_1 - \eta_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{D}},$$

domaine d_1.

Sortons de d_1 par le côté $\xi_1 + \eta_1 = 1$; nous avons, dans le voisinage de côté

$$\varepsilon_3 < 0, \qquad |\varepsilon_3| > \tfrac{1}{2},$$

la substitution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1, x_2 + x_4, x_3, x_4),$$

remplace ε_5 par $\varepsilon_5 + 1$, mais aussi ε_3 par $\varepsilon_3 + \varepsilon_1$.

Si cette quantité est, en valeur absolue, inférieure à $\frac{1}{2}$, la substitution considérée réduit la forme.

Or on a

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_1 = \xi_1 \eta_1 - (\xi_1 + \eta_1) + 1;$$

il n'est pas difficile de voir qu'au voisinage du côté traversé elle est positive et inférieure à $\frac{1}{2}$.

Donc, on obtient la forme

$$f_{1'} = (x_2 + x_4)^2 - D x_3^2 - (x_1 + x_2 + x_4) x_4 = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 - x_2) x_4.$$

Arrêtons-nous et revenons au domaine primitif d_0.

Sortons de d_0 par le côté

$$\xi_1 + \eta_1 = -\tfrac{1}{2};$$

on a

$$\varepsilon_1 > 0, \qquad |\varepsilon_1| > \tfrac{1}{2},$$

la substitution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_2, x_2, x_3, x_4),$$

qui remplace ε_1 par $\varepsilon_1 - 1$, réduit la forme qui devient

$$f_{1'} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 - x_2) x_4,$$

qui est réduite dans le rectangle $d_{1'}$,

$$\xi_1 + \eta_1 = -\tfrac{1}{2},\ -1, \qquad \xi_1 - \eta_1 = -\frac{1}{2\sqrt{D}}.$$

Or, cette forme $f_{1'}$ coïncide avec $f_{1'}$; donc, il est inutile de pousser plus avant la réduction dans la bande du plan, limitée par les droites

$$\xi_1 - \eta_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{D}}.$$

Si nous partons de d_0 dans le sens des ξ_1 positifs, nous rencontrons successivement les formes $f_0, f_1, f_{1'}, f_0, f_1, f_{1'}, \ldots$, et dans le sens des ξ_1

négatifs f_0, $f_{1'}$, f_1, f_0, $f_{1'}$, f_1, ...; de sorte que, si nous considérons le domaine formé par la réunion des domaines $d_{1'}$, d_0, d_1, nous voyons que ce domaine se reproduit à l'infini et nous donne une division régulière de la bande du plan considérée.

Revenons maintenant au domaine d_0 et réduisons la forme initiale en faisant varier le point (ξ_1, η_1) dans la bande du plan limitée par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Nous donnons la Table du calcul; ce que nous venons de dire nous permet d'abréger les explications

(α) $$f_0 = x_2^2 - Dx_3^2 - x_1 x_4.$$

Côté de sortie..... $\xi_1 - \eta_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_2| > \frac{1}{2}$.

Substitution....... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_2 = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 - x_3)x_4.$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -(\xi_1 + \eta_1),\\
\varepsilon_2 &= \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 1,\\
\varepsilon_3 &= \xi_1 \eta_1,\\
\varepsilon_5 &= -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},\\
\varepsilon_6 &= -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.
\end{aligned}$$

Domaine d_2..... $\xi_1 + \eta_1 = \pm \frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

Si l'on sort de d_0 symétriquement par rapport à l'origine, on trouve

$$f_{2'} = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 + x_3)x_4.$$

(β) Côté de sortie de d_2.... $\xi_1 - \eta_1 = \dfrac{3}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_2| > \frac{1}{2}$.

Substitution........... $(x_1, x_2, x_3\ x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{3'} = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 - 2x_3)x_4.$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -(\xi_1 + \eta_1),\\
\varepsilon_2 &= \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 2,\\
\varepsilon_3 &= \xi_1 \eta_1,\\
\varepsilon_5 &= -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},\\
\varepsilon_6 &= -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.
\end{aligned}$$

Domaine $d_{3'}$..... $\xi_1 + \eta_1 = \pm \frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$.

Si l'on sort de d_2, symétriquement, on trouve

$$f_{2^{2'}} = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 x_3)x_4.$$

(γ) Côté de sortie de d_{2^2}.... $\xi_1 - \eta_1 = \dfrac{5}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon| > \frac{1}{2}$.

Substitution........... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2^3} = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 - 3x_3)\,x_4,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -(\xi_1 + \eta_1), \\ \varepsilon_1 &= \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 3, \\ \varepsilon_3 &= \xi_1 \eta_1, \\ \varepsilon_5 &= -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \\ \varepsilon_6 &= \frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}. \end{aligned}$$

Domaine d_{2^3}.... $\xi_1 + \eta_1 = \pm \frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \dfrac{5}{2\sqrt{D}}$,

et, comme quatrième côté, la droite

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{7}{2\sqrt{D}},$$

ou l'hyperbole équilatère

$$\xi_1 \eta_1 + \tfrac{1}{2} = 0,$$

suivant la valeur de D. Si c'est la droite

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{5}{2\sqrt{D}},$$

on continuera à réduire de la même manière jusqu'à ce qu'on rencontre cette hyperbole équilatère, ce qui arrivera d'autant plus tard que D sera plus grand. Si nous supposons $D = 5$, cette circonstance se présente maintenant. Plaçons-nous dans ce cas pour fixer les idées; le domaine d_{2^3} est donc limité par

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}, \qquad \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{5}{2\sqrt{D}}, \qquad \xi_1 \eta_1 = -\tfrac{1}{2}.$$

(δ) Côté de sortie de d_{2^3}. $\xi_1 - \eta_1 + \frac{1}{2} = 0$, $\varepsilon_3 < 0$, $|\varepsilon_3| > \frac{1}{2}$.

Substitution....... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 + x_4, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2^4} = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 - 3x_3 + x_4)\,x_4.$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -(\xi_1+\eta_1),\\
\varepsilon_2 &= \sqrt{D}(\xi_1-\eta_1)-3,\\
\varepsilon_3 &= \xi_1\eta_1+1,\\
\varepsilon_5 &= -\frac{\xi_1+\eta_1}{2},\\
\varepsilon_6 &= -\frac{\xi_1-\eta_1}{2\sqrt{D}}.
\end{aligned}$$

Domaine d_{2^4}...... $\xi_1+\eta_1=\pm\frac{1}{2}$, $\xi_1\eta_1+\frac{1}{2}=0$, $\sqrt{D}(\xi_1-\eta_1)=\frac{7}{2}$.

On aurait de même, symétriquement,

$$f_{2'^4}=x_2^2-Dx_3^2-(x_1+3x_3+x_4)x_4.$$

(ε) Côté de sortie de $d_{2'^4}$. $\xi_1-\eta_1=\dfrac{7}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2>0$, $|\varepsilon_2|>\frac{1}{2}$.

Substitution....... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1-x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2^5}=x_2^2-Dx_3^2-(x_1-4x_3+x_4)x_4.$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -(\xi_1+\eta_1),\\
\varepsilon_2 &= \sqrt{D}(\xi_1-\eta_1)-4,\\
\varepsilon_3 &= \xi_1\eta_1+1,\\
\varepsilon_5 &= -\frac{\xi_1+\eta_1}{2},\\
\varepsilon_6 &= -\frac{\xi_1-\eta_1}{2\sqrt{D}}.
\end{aligned}$$

Domaine d_{2^5}...... $\xi_1+\eta_1=\pm\frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1-\eta_1)=\frac{7}{2}, \frac{9}{2}$.

On aurait, symétriquement,

$$f_{2'^5}=x_2^2-Dx_3^2-(x_1+4x_3+x_4)x_4.$$

(ζ) Côté de sortie de d_{2^5}.... $\xi_1-\eta_1=\dfrac{9}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2>0$, $|\varepsilon_2|>\frac{1}{2}$,

Substitution........... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1-x_3, x_2, x_3, x_4)$,

$$f_{2^6}=x_2^2-Dx_3^2-(x_1-5x_3+x_4)x_4,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -(\xi_1+\eta_1),\\
\varepsilon_2 &= \sqrt{D}(\xi_1-\eta_1)-5,\\
\varepsilon_3 &= \xi_1\eta_1+1,\\
\varepsilon_5 &= -\frac{\xi_1+\eta_1}{2},\\
\varepsilon_6 &= -\frac{\xi_1-\eta_1}{2\sqrt{D}}.
\end{aligned}$$

Domaine d_{2^6}..... $\xi_1+\eta_1=\pm\frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1-\eta_1)=\frac{9}{2}$,

et la droite

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \tfrac{11}{2},$$

ou la droite

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{2D}{2};$$

si l'on se place toujours dans le cas de $D = 5$, cette circonstance se présente ici, car $2D = 10$.

(η) Côté de sortie de d_{2^4}. $(\xi_1 - \eta_1) = \dfrac{2D}{2\sqrt{D}} \left(\dfrac{10}{2\sqrt{D}}\right)$, $\varepsilon_6 < 0$, $|\varepsilon_6| > \frac{1}{2}$.

La substitution $(x_3; x_3 + x_4)$ remplace ε_6 par $\varepsilon_6 + 1$, ce qui réduit ε_6, mais aussi ε_3 par $\varepsilon_3 + \varepsilon_2$.

Or, au voisinage du côté de sortie, $\varepsilon_3 + \varepsilon_2$ est > 0 et de valeur plus grande que $\frac{1}{2}$. Il faut donc, en outre, poser $(x_1; x_1 - x_4)$ pour achever de réduire la forme. La substitution réductrice est donc en définitive

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_4, x_2, x_3 + x_4, x_4),$$

$$f_{2^7} = x_2^2 - D(x_3 + x_4)^2 - (x_1 - 5x_3 - 5x_4 - x_4 + x_4)x_4 = x_2^2 - Dx_3^2 - x_1x_4 = f_0.$$

Il sera donc inutile d'aller plus loin et l'on voit que dans la bande limitée par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2},$$

si l'on s'avance dans le sens des ξ_1 positifs, on rencontre successivement les formes

$$f_0,\ f_2,\ f_{2^2},\ f_{2^3},\ f_{2^4},\ f_{2^5},\ f_{2^6},\ f_0,\ f_2,\ f_{2^2},\ \ldots,$$

et, dans le sens des ξ_1 négatifs,

$$\ldots,\ f_0,\ f_{2^{-6}},\ f_{2^{-5}},\ f_{2^{-4}},\ f_{2^{-3}},\ f_{2^{-2}},\ f_{2^{-1}},\ f_0.$$

Ce qui se passe pour $D = 5$ est général et l'on a un nombre de formes distinctes d'autant plus grand que D est lui-même plus grand.

Si donc on réunit ensemble les domaines

$$d_{2^{-6}},\ d_{2^{-5}},\ d_{2^{-4}},\ d_{2^{-3}},\ d_{2^{-2}},\ d_{2^{-1}},\ d_0,\ d_2,\ d_{2^2},\ d_{2^3},\ d_{2^4},\ d_{2^5},\ d_{2^6},$$

on obtient un domaine qui se reproduit à l'infini et donne une division régulière de la portion de plan limitée par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

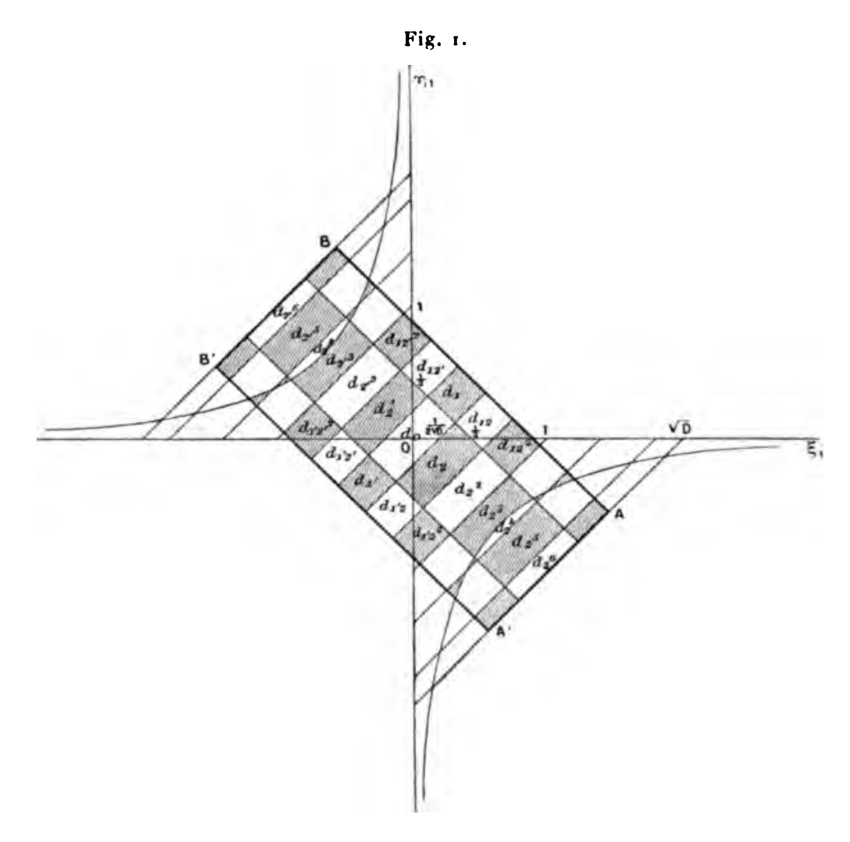
En tenant compte de ce que nous avons déjà trouvé, nous en concluons l'existence, dans le plan des ξ_1, η_1, d'un domaine fondamental qui est le rectangle ayant pour côtés

$$\xi_1 - \eta_1 = \pm 1, \qquad \xi_1 - \eta_1 = \pm\sqrt{D}.$$

La *fig.* 1, qui correspond au cas de $D = 5$, montre clairement tout ce que nous venons de dire.

Nous obtiendrons des substitutions semblables de la forme f_0, en prenant

Fig. 1.



les substitutions qui nous permettent de passer du domaine d_0 à tout domaine correspondant à la même réduite f_0.

On retrouve ainsi les substitutions qui correspondent aux substitutions hyperabéliennes

$$(\xi_1, \eta_1;\ \xi_1 + 1, \quad \eta_1 - 1),$$
$$(\xi_1, \eta_1;\ \xi_1 - \sqrt{D}, \ \eta_1 - \sqrt{D});$$

elles laissent d'ailleurs invariable le point à l'infini des domaines D, situé sur la limite du domaine S.

34. Revenons maintenant aux conditions de réduction et considérons-les dans toute leur généralité sans supposer $\zeta^2 = 1$. Les quantités ε_4 et ε_5 ont seules changé dans ce nouveau cas; on a

$$\varepsilon_4 = \sqrt{D}\,\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$$

et

$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \zeta^2\eta_1}{1+\zeta^2}.$$

Si l'on écrit les conditions

$$-\tfrac{1}{2} < -\frac{\xi_1+\zeta^2\eta_1}{1+\zeta^2} < \tfrac{1}{2},$$

les droites limites obtenues en prenant le signe d'égalité ne sont plus parallèles à $\xi_1 + \eta_1 = 0$, comme dans le cas précédent, mais ont un coefficient angulaire égal à $-\zeta^2$.

Nous allons construire ces droites limites pour les valeurs limites de ζ^2, c'est-à-dire pour les quatre valeurs

$$4D - 1 - 2\sqrt{2D(2D-1)},\quad \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1},\quad \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},\quad 4D-1+2\sqrt{2D(2D-1)}.$$

Les droites

$$2\left(\xi_1 + \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}\eta_1\right) = 1 + \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1},$$

$$2\left(\xi_1 + \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}\eta_1\right) = -1 - \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1},$$

passent respectivement par les points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, et par les points d'intersection des droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad \xi_1 + \eta_1 = -\tfrac{1}{2},$$
$$\xi_1 - \eta_1 = -\sqrt{D}, \qquad \xi_1 - \eta_1 = +\sqrt{D};$$

de même, les droites

$$2\left(\xi_1 + \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}\eta_1\right) = 1 + \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

$$2\left(\xi_1 + \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}\eta_1\right) = -1 - \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

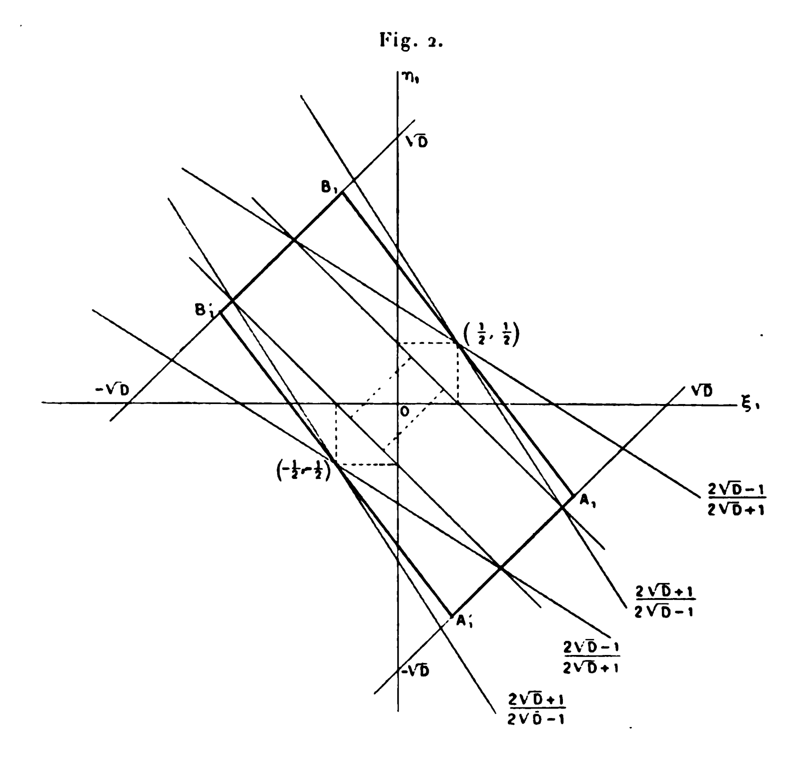
passent par les points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, et par les points d'intersection des

droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad \xi_1 + \eta_1 = -\tfrac{1}{2},$$
$$\xi_1 - \eta_1 = +\sqrt{D}, \qquad \xi_1 - \eta_1 = -\sqrt{D}.$$

Les quatre autres droites limites correspondant aux racines de l'équation en X du n° 31, passent également par les points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, et comprennent dans leur angle les droites que nous venons de construire; par

Fig. 2.



suite, deux d'entre elles, parallèles, coupent le domaine fondamental, les deux autres ne le traversent pas.

Nous voyons donc que, si ζ^2 est compris entre les nombres

$$\frac{2\sqrt{D} - 1}{2\sqrt{D} + 1}, \quad \frac{2\sqrt{D} + 1}{2\sqrt{D} - 1},$$

ε_1 est positif ou négatif, suivant que ζ^2 est plus petit ou plus grand que 1, et il n'y a de changé que la forme du domaine fondamental qui est un parallélogramme $A_1 A'_1 B_1 B'_1$ ayant pour côtés

$$\xi_1 - \eta_1 = \pm\sqrt{D}, \qquad \xi_1 + \zeta^2\eta_1 = \pm(1 + \zeta^2).$$

Nous pouvons résumer les résultats obtenus jusqu'ici et leur donner une forme géométrique en considérant ζ^2 comme une troisième coordonnée dans un système de coordonnées rectangulaires (ξ_1, η_1, ζ^2).

ζ^2 variant de $\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}$ à $\frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}$, nous avons une division régulière de la portion d'espace limitée par les deux plans

$$\zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}, \qquad \zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

qui résulte de la répétition d'un même domaine fondamental formé par la portion d'espace comprise entre les deux plans $\xi_1 - \eta_1 \pm \sqrt{D}$ et les deux hélicoïdes gauches $\xi_1 + \zeta^2\eta_1 = \pm(1+\zeta^2)$.

35. Si ζ^2 est en dehors de l'intervalle $\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}, \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}$, une étude complémentaire s'impose.

Dans ce cas, en effet, on a

$$\varepsilon_4 \lesseqgtr 0, \qquad |\varepsilon_4| > \tfrac{1}{2},$$

et la forme f_0 ne peut être réduite pour aucune valeur de (ξ_1, η_1). C'est dire que le domaine d_0 de réduction de f_0 ne s'étend ni au-dessus, ni au-dessous des deux plans précédents.

Considérons les plans

$$\zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}-p}{2\sqrt{D}+p}, \qquad \zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}+p}{2\sqrt{D}-p},$$

p étant un nombre entier positif impair. Les premiers coupent l'axe des ζ^2 entre l'origine et le point $\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}$, si $p \leqq 2\sqrt{D}$, les seconds entre le point $\frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}$ et l'∞. Ne considérons de ces plans que ceux compris entre les racines de l'équation en X, de manière à avoir toujours pour les valeurs correspondantes de ζ^2

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Cela étant, si ζ^2 est compris entre

$$\frac{2\sqrt{D}-(p+2)}{2\sqrt{D}+(p+2)} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{D}-p}{2\sqrt{D}+p},$$

la substitution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\; x_1, x_2 - px_3, x_3, x_4)$$

réduira la forme, à condition qu'il y ait des valeurs de (ξ_1, η_1) satisfaisant aux conditions

$$|\varepsilon_2 - p\varepsilon_1| = |\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1)| < \tfrac{1}{2},$$

et, si ζ^2 est compris entre

$$\frac{2\sqrt{D} + p}{2\sqrt{D} - p} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{D} + (p+2)}{2\sqrt{D} - (p+2)},$$

il faudra prendre, pour réduire la forme, la substitution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\; x_1, x_2 + px_3, x_3, x_4),$$

pourvu qu'il existe des valeurs de (ξ_1, η_1) satisfaisant aux inégalités

$$|\varepsilon_2 + p\varepsilon_1| = |\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - p(\xi_1 + \eta_1)| < \tfrac{1}{2},$$

car, par exemple, la première substitution remplace

$$\varepsilon_4 \text{ par } \varepsilon_4 - p \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 \text{ par } \varepsilon_2 - p\varepsilon_1.$$

Or, $\varepsilon_1 = \sqrt{D}\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$ est plus petit que $\frac{p+1}{2}$ et plus grand que p. Pour s'assurer si la condition auxiliaire peut être satisfaite, construisons dans le premier cas les droites

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1) - \tfrac{1}{2} = 0,$$
$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1) + \tfrac{1}{2} = 0;$$

ces droites sont parallèles et passent respectivement par les points

$$\left(\frac{1}{4p}, \frac{1}{4p}\right), \quad \left(\frac{1}{4\sqrt{D}}, -\frac{1}{4\sqrt{D}}\right),$$
$$\left(-\frac{1}{4p}, -\frac{1}{4p}\right), \quad \left(-\frac{1}{4\sqrt{D}}, \frac{1}{4\sqrt{D}}\right),$$

et les points de la portion de plan comprise entre ces droites satisfont à la condition exigée pour la réduction.

Il en est de même dans le second cas.

36. Appliquons ces substitutions à la forme f_0 ; nous trouvons

$$(x_2 - px_3)^2 - Dx_3^2 - x_1 x_4, \quad \text{si} \quad \varepsilon_4 > 0,$$
$$(x_2 + px_3)^2 - Dx_3^2 - x_1 x_4, \quad \text{si} \quad \varepsilon_4 < 0.$$

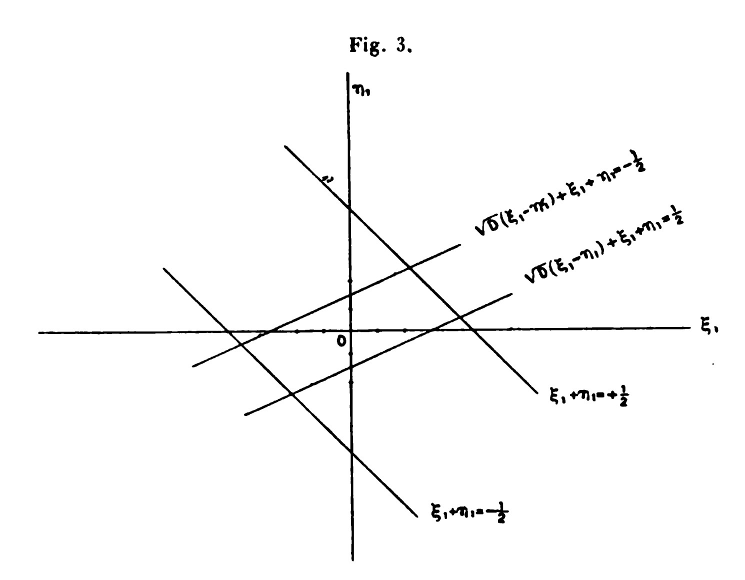
Si, en outre, nous supposons fixe la valeur de ζ^2, nous voyons que ces formes seront réduites dans les parallélogrammes limités par les droites

$$\sqrt{D}\,(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1) \pm \tfrac{1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

La réduction continuelle de chacune des deux formes dans les plans correspondant aux valeurs de ζ^2 se fera sans plus de peine que dans l'exemple traité plus haut, et l'on rencontrera encore ici les deux mêmes substitutions semblables.

La *fig.* 3 ci-dessous montre le parallélogramme dans lequel est réduite

Fig. 3.



la forme de départ et correspond au cas où ζ^2 est compris entre

$$\frac{2\sqrt{D} - 3}{2\sqrt{D} + 3} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{D} - 1}{2\sqrt{D} + 1} \qquad \text{et} \qquad D = 5.$$

Dans ce qui précède, nous avons retrouvé deux de nos substitutions fondamentales ; ce sont celles qui correspondent aux substitutions semblables,

$$(\xi, \eta;\ \xi + 1, \eta - 1), \qquad (\xi, \eta;\ \xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}).$$

Elles laissent d'ailleurs invariable le point de la limite du domaine S commun à tous les domaines de réduction.

Abandonnons maintenant l'hypothèse faite jusqu'à présent

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \tfrac{1}{2},$$

et faisons varier le plan $\zeta^2 =$ const. en dehors des limites qui lui étaient imposées par les racines de l'équation en X. Il est clair que pour réduire de nouveau la forme, on pourra employer une substitution de la forme

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1, \alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_2 + \delta x_3, x_4)$$

avec

$$\alpha\gamma - \beta\delta = 1,$$

à condition de supposer (ξ_1, η_1) choisis de manière à satisfaire aux inégalités

$$-\tfrac{1}{2} < \alpha\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2 < \tfrac{1}{2},$$
$$-\tfrac{1}{2} < \beta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 < \tfrac{1}{2},$$

ce qui est toujours possible, car il suffit de supposer (ξ_1, η_1) à l'intérieur du parallélogramme ayant pour côtés

$$\alpha\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2 = \pm \tfrac{1}{2}, \qquad \beta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Il suffira même que la substitution choisie réduise la forme binaire

$$\mu_2(x_2 + \varepsilon_4 x_3)^2 + \mu_3 x_3^2,$$

les conditions relatives à (ξ_1, η_1) étant conservées.

Or, le calcul de la réduction de cette forme binaire définie est forcément limité, comme on sait. On finira par retomber sur des réduites obtenues et l'on déduira par conséquent, de ce calcul, des substitutions semblables pour la forme donnée. Elles ne contiendront que x_2 et x_3; donc elles seront aussi des substitutions semblables de $x_2^2 - Dx_3^2$, c'est-à-dire seront telles que l'on ait

$$\alpha^2 - D\gamma^2 = 1.$$

Ce seront donc les substitutions qui correspondent aux puissances de la substitution

$$[\xi, \eta;\ (a - c\sqrt{D})\xi, (a + c\sqrt{D})\eta],$$

a et c étant des solutions de l'équation de Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

Cette substitution laisse aussi invariable le point de la limite du domaine S commun aux domaines de réduction.

En résumé, ce calcul de réduction continuelle nous a fait retrouver les trois substitutions désignées par α, β, δ au début de cette seconde Partie, et nous montre que ces substitutions laissent invariable un point de la limite du domaine S.

Sur une classe de sous-groupes.

37. On connaît l'importance spéciale, dans la théorie des fonctions modulaires, des sous-groupes à congruences, c'est-à-dire des sous-groupes dont les substitutions

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

satisfont aux congruences

$$\left.\begin{aligned} \alpha \equiv \delta &\equiv \pm 1 \\ \gamma \equiv \beta &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{n}.$$

M. Klein les a pris comme base d'une classification, dans laquelle il a divisé les fonctions modulaires en degrés (Stufen) suivant la valeur de l'entier n. Il existe, dans le groupe découvert par M. Picard, des sous-groupes tout à fait analogues.

Si nous prenons, par exemple, les substitutions du type A

$$\xi_1 = \frac{(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi - (a_1 + a_3\sqrt{D})}{-(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi + (b_1 + b_3\sqrt{D})}, \qquad \eta_1 = \frac{(a_0 + a_2\sqrt{D})\eta + (a_1 - a_3\sqrt{D})}{(b_0 + b_2\sqrt{D})\eta + (b_1 - b_3\sqrt{D})},$$

et, si l'on désigne par n un nombre entier, les substitutions satisfaisant aux congruences

$$\left.\begin{aligned} &a_0 - a_2\sqrt{D} \equiv \pm 1, && a_1 + a_3\sqrt{D} \equiv 0 \\ &b_0 - b_2\sqrt{D} \equiv 0, && b_1 + b_3\sqrt{D} \equiv \pm 1 \\ &a_0 + a_2\sqrt{D} \equiv \pm 1, && a_1 - a_3\sqrt{D} \equiv 0 \\ &b_0 + b_2\sqrt{D} \equiv 0, && b_1 - b_3\sqrt{D} \equiv \pm 1 \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

forment un groupe qui, ainsi qu'il est aisé de le voir, est un sous-groupe d'indice fini du groupe que nous étudions.

TROISIÈME PARTIE.

FONCTIONS DU GROUPE.

Fonctions ϑ et modules.

38. Nous allons nous occuper, dans ce Chapitre, des fonctions que laissent invariables les substitutions du groupe que nous considérons ou d'un de ses sous-groupes.

Avant d'aborder cette question, nous allons considérer un cas particulier important.

On sait quel grand intérêt offre, dans le cas du groupe modulaire, l'étude des fonctions ϑ, dans lesquelles on suppose l'argument nul et où l'on considère comme variable le rapport $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ des périodes. M. Hermite a rencontré ainsi le premier exemple de fonctions modulaires.

Nous allons considérer de même ici les fonctions ϑ à deux arguments, et nous donnerons à ces arguments les valeurs o.

39. On sait qu'il y a seize fonctions ϑ à deux arguments; six d'entre elles sont des fonctions impaires; les dix autres sont des fonctions paires. Si donc on y suppose les arguments nuls, les six fonctions impaires seront identiquement nulles et nous aurons seulement à considérer dix fonctions ϑ.

En prenant comme notations celles de MM. Weierstrass et Weber, nos fonctions auront la forme

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(0, 0)$$
$$= \sum_{m_1}^{+\infty}\!\!{}_{-\infty} \sum_{m_2}^{+\infty}\!\!{}_{-\infty} e^{\pi i\left[\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)^2\tau_{11} + 2\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)\tau_{12} + \left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)^2\tau_{22}\right] + \pi i\left[\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)h_1 + \left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)h_2\right]},$$

$\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ désignent les modules de périodicité.

$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ se nomme la *caractéristique;* les nombres g et h sont égaux à

o ou 1 ; de plus, la fonction étant paire, on a

$$g_1 h_1 + g_2 h_2 \equiv 0 \pmod{2}.$$

De plus, nous conviendrons de représenter les dix fonctions $\mathfrak{S}$ paires par l'une ou l'autre des notations

$$\mathfrak{S}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{S}_5, \qquad \mathfrak{S}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{S}_{14},$$

$$\mathfrak{S}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{S}_{01}, \qquad \mathfrak{S}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{S}_{12},$$

$$\mathfrak{S}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{S}_4, \qquad \mathfrak{S}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{S}_{03},$$

$$\mathfrak{S}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{S}_{23}, \qquad \mathfrak{S}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{S}_{34},$$

$$\mathfrak{S}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{S}_0, \qquad \mathfrak{S}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{S}_2.$$

Nous rappellerons que les éléments du Tableau suivant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathfrak{S}_4^2}{\mathfrak{S}_5^2} & \dfrac{\mathfrak{S}_0^2}{\mathfrak{S}_5^2} & -\dfrac{\mathfrak{S}_2^2}{\mathfrak{S}_5^2} \\ -\dfrac{\mathfrak{S}_{14}^2}{\mathfrak{S}_5^2} & \dfrac{\mathfrak{S}_{01}^2}{\mathfrak{S}_5^2} & \dfrac{\mathfrak{S}_{12}^2}{\mathfrak{S}_5^2} \\ \dfrac{\mathfrak{S}_{34}^2}{\mathfrak{S}_5^2} & -\dfrac{\mathfrak{S}_{03}^2}{\mathfrak{S}_5^2} & \dfrac{\mathfrak{S}_{23}^2}{\mathfrak{S}_5^2} \end{vmatrix}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale.

40. Nous avons posé, d'après M. Picard,

$$\tau_{11} = -\frac{2\sqrt{D}}{\xi+\eta}, \qquad \tau_{12} = \sqrt{D}\,\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}, \qquad \tau_{22} = \frac{2\sqrt{D}\,\xi\eta}{\xi+\eta}.$$

Si l'on fait cette substitution dans les fonctions $\mathfrak{S}$, elles deviennent des fonctions des deux variables indépendantes ξ et η et du nombre entier D [1].

Pour voir ce que deviennent ces fonctions quand on effectue sur les variables ξ, η les substitutions du groupe, il est nécessaire de chercher les

[1] On voit qu'une particularité des fonctions que nous étudions est de dépendre de *deux* variables et d'*un* nombre entier, tandis que, dans le cas des fonctions modulaires, on ne rencontre que la variable $\tau = \dfrac{\omega'}{\omega}$.

la formule de transformation devient

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(\tau') = \mathfrak{S}_1 \vartheta \begin{bmatrix} g'_1 & g'_2 \\ h'_1 & h'_2 \end{bmatrix}(\tau);$$

appliquée aux dix fonctions ϑ, elle donne, en désignant par ϑ'_α la fonction ϑ_α relative aux modules transformés τ',

$$\begin{aligned}
\vartheta'_5 &= \mathfrak{S}_1\vartheta_5, & \vartheta'_{14} &= \mathfrak{S}_1\vartheta_{03}, \\
\vartheta'_{01} &= \mathfrak{S}_1\vartheta_{01}, & \vartheta'_{12} &= \mathfrak{S}_1\vartheta_0, \\
\vartheta'_4 &= \mathfrak{S}_1\vartheta_{23}, & \vartheta'_{03} &= \mathfrak{S}_1\vartheta_{14}, \\
\vartheta'_{23} &= \mathfrak{S}_1\vartheta_4, & \vartheta'_{34} &= \mathfrak{S}_1\vartheta_{34}, \\
\vartheta'_0 &= \mathfrak{S}_1\vartheta_{12}, & \vartheta'_2 &= \mathfrak{S}_1\vartheta_2.
\end{aligned}$$

En outre, si l'on développe l'identité

$$\vartheta'_5 = \mathfrak{S}_1\vartheta_5,$$

on voit que la transformation sur les τ équivaut à la substitution suivante sur les indices de la série

$$(m_1, m_2; m_1 - m_2, m_2);$$

donc, elle ne fait que changer l'ordre des termes de la série, ce qui n'a aucun effet sur sa valeur, la série étant absolument convergente. On a donc

$$\mathfrak{S}_1 = +1,$$

et l'on peut écrire le Tableau ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned}
\vartheta'_5 &= \vartheta_5, & \vartheta'_{23} &= \vartheta_4, \\
\vartheta'_{01} &= \vartheta_{01}, & \vartheta'_0 &= \vartheta_{12}, \\
\vartheta'_{34} &= \vartheta_{34}, & \vartheta'_{12} &= \vartheta_0, \\
\vartheta'_2 &= \vartheta_2, & \vartheta'_{14} &= \vartheta_{03}, \\
\vartheta'_4 &= \vartheta_{23}, & \vartheta'_{03} &= \vartheta_{14}.
\end{aligned}$$

Transformation β.

L'une des transformations linéaires correspondantes est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{D} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

d'où

$$a = 1,\qquad b = 0,\qquad \omega' = -\mathrm{D}g_2^2 + h_1^2 + 2h_1,$$
$$g'_1 = g_1 + h_1 + 1,$$
$$g'_2 = g_2,$$
$$h'_2 = -\mathrm{D}g_2 + h_2 - \mathrm{D},$$
$$h'_1 = h_1.$$

On n'obtient pas les mêmes résultats en appliquant la formule de transformation, suivant que D est impair ou pair. On doit donc distinguer deux cas. On a, dans le cas où D est impair,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}'_5 &= \mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_2, & \mathfrak{I}'_0 &= e^{\frac{i\pi}{4}}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{12},\\
\mathfrak{I}'_2 &= \mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_5, & \mathfrak{I}'_4 &= -e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{23},\\
\mathfrak{I}'_{01} &= \mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{34}, & \mathfrak{I}'_{23} &= -e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_4,\\
\mathfrak{I}'_{34} &= \mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{01}, & \mathfrak{I}'_{14} &= -e^{\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}+1)}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{14},\\
\mathfrak{I}'_{12} &= e^{\frac{i\pi}{4}}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_0, & \mathfrak{I}'_{03} &= -e^{\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}+1)}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{03},
\end{aligned}$$

et, dans le cas où D est pair,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}'_5 &= \mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{01}, & \mathfrak{I}'_{14} &= -e^{\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}-1)}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{14},\\
\mathfrak{I}'_{01} &= \mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_5, & \mathfrak{I}'_{03} &= -e^{-\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}-1)}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{03},\\
\mathfrak{I}'_{34} &= \mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_2, & \mathfrak{I}'_{12} &= e^{\frac{i\pi}{4}}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{12},\\
\mathfrak{I}'_2 &= \mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{34}, & \mathfrak{I}'_4 &= e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_{23},\\
\mathfrak{I}'_0 &= e^{\frac{i\pi}{4}}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_0, & \mathfrak{I}'_{23} &= e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}}\mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_4.
\end{aligned}$$

Nous réservons, pour le moment, la détermination de la constante $\mathfrak{C}_2$.

Transformation γ.

L'une des transformations linéaires est

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

d'où

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad \omega' = 0,$$
$$g'_1 = -g_2,$$
$$g'_2 = g_1,$$
$$h'_2 = h_1,$$
$$h'_1 = -h_2.$$

On obtient le Tableau suivant, après avoir déterminé la constante $\varepsilon_3 = +1$, comme dans le premier cas,

$$\begin{array}{ll} \vartheta'_5 = \vartheta_5, & \vartheta'_4 = \vartheta_{01}, \\ \vartheta'_{23} = \vartheta_{23}, & \vartheta'_{12} = \vartheta_{34}, \\ \vartheta'_0 = \vartheta_0, & \vartheta'_{34} = \vartheta_{12}, \\ \vartheta'_{14} = \vartheta_{14}, & \vartheta'_{03} = \vartheta_2, \\ \vartheta'_{01} = \vartheta_4, & \vartheta'_2 = \vartheta_{03}. \end{array}$$

Transformation δ.

L'une des deux transformations linéaires est

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & \alpha_2 \\ D\alpha_2 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & D\alpha_2 & 0 & \alpha_0 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha_0^2 - D\alpha_2^2 = 1, \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_0 \equiv 1 \\ \alpha_2 \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\text{mod } 2),$$

d'où

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad \omega' = 2D\alpha_0\alpha_2 + 2\alpha_0\alpha_2 + 4D\alpha_2^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 8).$$

On obtient le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} \vartheta'_5 = \varepsilon_4\vartheta_5, & \vartheta'_{14} = \varepsilon_4\vartheta_{14}, \\ \vartheta'_{01} = \varepsilon_4\vartheta_{01}, & \vartheta'_{12} = \varepsilon_4\vartheta_{12}, \\ \vartheta'_4 = \varepsilon_4\vartheta_4, & \vartheta'_{03} = \varepsilon_4\vartheta_{03}, \\ \vartheta'_{23} = \varepsilon_4\vartheta_{23}, & \vartheta'_{34} = \varepsilon_4\vartheta_{34}, \\ \vartheta'_0 = \varepsilon_4\vartheta_0, & \vartheta'_2 = \varepsilon_4\vartheta_2. \end{array}$$

Si $D \equiv 0 \pmod 2$, il s'introduit en outre, dans le second membre, un facteur $e^{i\pi\frac{3\alpha_0\alpha_2}{2}}$ qui est égal à $+1$ si $\alpha_2 \equiv 0$, -1 si $\alpha_2 \not\equiv 0 \pmod 4$. Nous réservons également la détermination de la constante ε_4.

Transformation ε.

L'une des deux transformations est

$$\begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{vmatrix},$$

d'où

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad \omega' = 0,$$

$$g'_1 = +g_1,$$
$$g'_2 = -g_2,$$
$$h'_2 = -h_2,$$
$$h'_1 = +h_1.$$

Si l'on détermine la constante $\mathfrak{C}_5$ comme plus haut, on trouve $\mathfrak{C}_5 = +1$ et l'on trouve le Tableau

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{S}'_5 = \mathfrak{S}_5, & \mathfrak{S}'_{14} = \mathfrak{S}_{14}, \\ \mathfrak{S}'_{01} = \mathfrak{S}_{01}, & \mathfrak{S}'_{12} = \mathfrak{S}_{12}, \\ \mathfrak{S}'_4 = \mathfrak{S}_4, & \mathfrak{S}'_{03} = \mathfrak{S}_{03}, \\ \mathfrak{S}'_{23} = \mathfrak{S}_{23}, & \mathfrak{S}'_{34} = \mathfrak{S}_{34}, \\ \mathfrak{S}'_0 = \mathfrak{S}_0, & \mathfrak{S}'_2 = \mathfrak{S}_2. \end{array}$$

42. Il resterait maintenant, pour compléter ce que nous venons de dire, à déterminer les constantes $\mathfrak{C}_2$ et $\mathfrak{C}_1$. Remarquons toutefois que, les fonctions $\mathfrak{S}$ n'intervenant que par leurs rapports dans ce qui va suivre, les valeurs de ces constantes ne nous sont d'aucune utilité.

Pourtant, nous avons appliqué à cette détermination une méthode bien connue, donnée jadis par M. Hermite dans le *Journal de Liouville* (année 1858), pour les fonctions $\mathfrak{S}$ à un seul argument et étendue aux fonctions $\mathfrak{S}$ à p arguments par M. Weber (1).

Nous n'avons rien trouvé de particulièrement remarquable. On peut vérifier les résultats en cherchant, par une méthode donnée par M. Krause dans son Livre *Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques du*

(1) WEBER, *Journal de Crelle*, t. 74.

premier ordre, le carré de ces constantes. On trouve

$$\mathfrak{S}_2^2 = \frac{1}{1 + \tau'_{11}},$$

$$\mathfrak{S}_4^2 = \frac{1}{D\alpha_2^2 + 2\alpha_0\alpha_2\tau'_{12} + \alpha_0^2} = \frac{1}{c\tau_{12} - a}.$$

Nous avons résumé dans deux Tableaux à double entrée l'effet produit sur les dix fonctions ϑ paires à arguments par les substitutions fondamentales du groupe. Le premier Tableau est relatif à $D \not\equiv 1 \pmod 2$, le second à $D \equiv 0 \pmod 2$. Dans ces Tableaux, l'entrée verticale est relative aux substitutions, l'entrée horizontale aux fonctions ϑ; nous n'y avons désigné les fonctions ϑ que par leurs indices.

43. Ces Tableaux nous montrent immédiatement que les fonctions ϑ se séparent en deux groupes, les fonctions de chaque groupe ne faisant que se permuter, à des constantes près, par les substitutions α, β, γ, δ.

Quand $D \equiv 1 \pmod 2$, ces groupements sont

$$(\vartheta_5, \vartheta_2, \vartheta_{03}, \vartheta_{14}) \quad \text{et} \quad (\vartheta_4, \vartheta_{01}, \vartheta_{23}, \vartheta_{12}, \vartheta_{34}, \vartheta_0).$$

Quand $D \equiv 0 \pmod 2$, ce sont

$$(\vartheta_5, \vartheta_{01}, \vartheta_4, \vartheta_{23}) \quad \text{et} \quad (\vartheta_0, \vartheta_{14}, \vartheta_{12}, \vartheta_{03}, \vartheta_{34}, \vartheta_2).$$

Les groupements

$$(\vartheta_5, \vartheta_2, \vartheta_{03}, \vartheta_{14}) \quad \text{et} \quad (\vartheta_5, \vartheta_{01}, \vartheta_4, \vartheta_{23})$$

sont des groupements connus dans la théorie des fonctions ϑ.

Il n'y a pas de relation linéaire entre les quatre fonctions ϑ d'un même groupe et le carré de toute fonction ϑ peut s'exprimer linéairement en fonction des carrés des quatre fonctions de chacun de ces groupements.

Les groupements de cette nature, qui sont au nombre de soixante dans la théorie générale, portent le nom de *quadruplets pairs*. Ce sont aussi les fonctions ϑ contenues dans de tels groupements qui donnent lieu à la célèbre relation biquadratique de Göpel.

$D \not\equiv 1 \pmod 2$.

SUBSTITUTION.	5.	01.	4.	23.	0.	14.	12.	03.	34.	2.	CONST.
α...........	5	01	23	4	12	03	0	14	34	2	1
β...........	2	34	$-e^{\frac{i\pi}{4}D}$ 23	$-e^{\frac{i\pi}{4}D}$ 4	$e^{\frac{i\pi}{4}}$ 12	$-e^{\frac{i\pi}{4}(D+1)}$ 14	$e^{\frac{i\pi}{4}}$ 0	$-e^{\frac{i\pi}{4}(D+1)}$ 03	01	5	$\mathfrak{S}_2$
γ...........	5	4	01	23	0	14	34	2	12	03	1
δ...........	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	$\mathfrak{S}_4$
ε...........	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	1

$D \equiv 0 \pmod 2$.

SUBSTITUTION.	5.	01.	4.	23.	0.	14.	12.	03.	34.	2.	CONST.
α...........	5	01	23	4	12	03	0	14	34	2	1
β...........	01	5	$e^{\frac{i\pi}{4}D}$ 23	$e^{\frac{i\pi}{4}D}$ 4	$e^{\frac{i\pi}{4}}$ 0	$-e^{-\frac{i\pi}{4}(D-1)}$ 14	$e^{\frac{i\pi}{4}}$ 12	$-e^{-\frac{i\pi}{4}(D-1)}$ 03	2	34	$\mathfrak{S}_2$
γ...........	5	4	01	23	0	14	34	2	12	03	1
δ...........	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	$\pm \mathfrak{S}_4$
ε...........	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	1

44. Ces Tableaux nous permettent également de former autant de fonctions invariables par les substitutions du groupe que nous le désirons.

Remarquons d'abord que les exponentielles qui interviennent comme facteurs dans les fonctions ϑ sont toutes des racines huitièmes de l'unité.

Il en résulte que toute fonction symétrique des puissances huitièmes des fonctions ϑ contenues soit dans le premier groupement, soit dans le second, soit dans les deux groupements, se reproduit à une constante près, qui est le produit $\mathfrak{E}_2^{8p}\,\mathfrak{E}_4^{8q}$ élevé à la puissance marquée par le degré de la fonction symétrique.

En conséquence :

Si l'on prend deux pareilles fonctions symétriques, si on les élève à des puissances convenables et si l'on en prend le rapport, les constantes disparaîtront et l'on obtiendra une fonction qui sera invariable par toutes les substitutions du groupe.

Telles sont, par exemple, les fonctions

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{(\vartheta_5^8+\vartheta_2^8+\vartheta_{03}^8+\vartheta_{14}^8)^2}{\vartheta_5^8\vartheta_2^8+\vartheta_5^8\vartheta_{03}^8+\vartheta_5^8\vartheta_{14}^8+\vartheta_2^8\vartheta_{03}^8+\vartheta_2^8\vartheta_{14}^8+\vartheta_{03}^8\vartheta_{14}^8}\\[2ex]
\dfrac{(\vartheta_{01}^8+\vartheta_{34}^8+\vartheta_4^8+\vartheta_{12}^8+\vartheta_{23}^8+\vartheta_0^8)^6}{\vartheta_{01}^8\,\vartheta_{34}^8\,\vartheta_4^8\,\vartheta_{12}^8\,\vartheta_{23}^8\,\vartheta_0^8}\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_5^8+\vartheta_2^8+\vartheta_{03}^8+\vartheta_{14}^8}{\vartheta_{01}^8+\vartheta_{34}^8+\vartheta_4^8+\vartheta_{12}^8+\vartheta_{23}^8+\vartheta_0^8}
\end{array}\right\}\qquad D\equiv 1 \pmod 2.$$

Voici un cas où ce procédé se simplifie et l'on obtient une fonction remarquable du groupe.

Posons

$$\Phi = \vartheta_5\,\vartheta_2\,\vartheta_{03}\,\vartheta_{14},$$

$$\Psi = \vartheta_4\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{23}\,\vartheta_{12}\,\vartheta_{34}\,\vartheta_0.$$

La substitution α....... les reproduit

» β....... les multiplie respectivement par $\pm\mathfrak{E}_2^4$, $\pm\mathfrak{E}_2^6$

» γ....... les reproduit

» δ....... les multiplie respectivement par $\mathfrak{E}_4^4$, $\mathfrak{E}_4^6$

» ε....... les reproduit.

Donc, une substitution quelconque du groupe les multiplie respectivement par

$$\pm\,\mathfrak{E}_2^{4p}\,\mathfrak{E}_4^{4q}, \qquad \pm\,\mathfrak{E}_2^{6p}\,\mathfrak{E}_4^{6q}.$$

Donc, la fonction

$$\frac{\Phi^6}{\Psi^4}$$

est une fonction du groupe.

45. Comme autres fonctions particulières, considérons les modules; d'abord un système de modules de Borchardt (1).

Posons

$$\sqrt{x_1} = \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_5}, \qquad \sqrt{x_2} = \frac{\mathfrak{S}_{03}}{\mathfrak{S}_5}, \qquad \sqrt{x_3} = \frac{\mathfrak{S}_{14}}{\mathfrak{S}_5},$$

et supposons par exemple $D \equiv 1 \pmod 2$.

On voit, sans qu'il soit utile d'insister, en se reportant aux Tableaux donnés plus haut, que les cinq substitutions

$$\alpha, \quad \beta^2, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon$$

ne font que permuter ou changer le signe de ces trois modules. Donc, le sous-groupe ayant pour substitutions fondamentales

$$\alpha, \quad \beta^4, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon$$

laisse invariable le système considéré des modules de Borchardt.

46. Si nous recherchons quelles sont les substitutions de notre groupe qui laissent invariables les modules de Richelot, il suffit de considérer un seul système de tels modules, tous les autres modules s'exprimant rationnellement à l'aide des premiers. Prenons, par exemple, les modules x, λ, μ définis par les formules

$$x = \frac{\mathfrak{S}_{23}\mathfrak{S}_{01}}{\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5}, \qquad \lambda = \frac{\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_{23}}{\mathfrak{S}_{34}\mathfrak{S}_4}, \qquad \mu = \frac{\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_{01}}{\mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_{34}},$$

les fonctions $\mathfrak{S}$ qui y entrent étant supposées à arguments nuls.

En désignant par θ les fonctions θ transformées par une quelconque des substitutions cherchées, on a nécessairement

$$\frac{\mathfrak{S}_{23}\mathfrak{S}_{01}}{\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5} = \frac{\theta_{23}\theta_{01}}{\theta_4\theta_5}, \qquad \frac{\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_{23}}{\mathfrak{S}_{34}\mathfrak{S}_4} = \frac{\theta_2\theta_{23}}{\theta_{34}\theta_4}, \qquad \frac{\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_{01}}{\mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_{34}} = \frac{\theta_2\theta_{01}}{\theta_5\theta_{34}},$$

---

(1) BORCHARDT, *Sur le choix des modules dans les intégrales hyperelliptiques* (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII; 1879).

d'où l'on déduit sans peine

$$\frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} = \frac{\theta_{01}^2}{\theta_5^2}, \qquad \frac{\vartheta_{23}^2}{\vartheta_4^2} = \frac{\theta_{23}^2}{\theta_4^2}, \qquad \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_{34}^2} = \frac{\theta_2^2}{\theta_{34}^2},$$

ce qui montre que toute substitution cherchée doit, avant tout, reproduire les caractéristiques

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

correspondant aux fonctions ϑ,

$$\vartheta_5, \quad \vartheta_{23}, \quad \vartheta_4, \quad \vartheta_{01}, \quad \vartheta_2, \quad \vartheta_{34}.$$

Développons ces conditions.

On sait que les éléments de la caractéristique transformée $\begin{bmatrix} g'_1 & g'_2 \\ h'_1 & h'_2 \end{bmatrix}$ en fonction des éléments de l'ancienne caractéristique $\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
g'_1 &= g_1 a_0 + g_2 a_1 + h_2 a_2 + h_1 a_3 + a \qquad \text{où} \qquad & a &= a_0 a_3 + a_1 a_2, \\
g'_2 &= g_1 b_0 + g_2 b_1 + h_2 b_2 + h_1 b_3 + b & b &= b_0 b_3 + b_1 b_2, \\
h'_2 &= g_1 c_0 + g_2 c_1 + h_2 c_2 + h_1 c_3 + c & c &= c_0 c_3 + c_1 c_2, \\
h'_1 &= g_1 d_0 + g_2 d_1 + h_2 d_2 + h_1 d_3 + d & d &= d_0 d_3 + d_1 d_2;
\end{aligned}$$

en exprimant les conditions trouvées plus haut, on a

$$\begin{array}{lllll}
a \equiv 0, & a_0 + a_1 + a \equiv 1, & a_1 + a \equiv 0, & a_0 + a \equiv 1, & a_2 + a \equiv 0, \\
b \equiv 0, & b_0 + b_1 + b \equiv 1, & b_1 + b \equiv 1, & b_0 + b \equiv 0, & b_2 + b \equiv 0, \\
c \equiv 0, & c_0 + c_1 + c \equiv 0, & c_1 + c \equiv 0, & c_0 + c \equiv 0, & c_2 + c \equiv 1, \\
d \equiv 0, & d_0 + d_1 + d \equiv 0, & d_1 + d \equiv 0, & d_0 + d \equiv 0, & d_2 + d \equiv 0,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
a_0 + a_2 + a &\equiv 1, \\
b_0 + b_2 + b &\equiv 0, \\
c_0 + c_2 + c &\equiv 1, \\
d_0 + d_2 + d &\equiv 0,
\end{aligned}$$

toutes ces congruences étant prises selon le mod 2. On en tire immédiatement

$$\begin{array}{llll}
a_0 \equiv 1, & a_1 \equiv 0, & a_2 \equiv 0, & a_3 \equiv 0, \\
b_0 \equiv 0, & b_1 \equiv 1, & b_2 \equiv 0, & b_3 \equiv 0, 1, \\
c_0 \equiv 0, & c_1 \equiv 0, & c_2 \equiv 1, & c_3 \equiv 0, 1, \\
d_0 \equiv 0, & d_1 \equiv 0, & d_2 \equiv 0, & d_3 \equiv 0, 1.
\end{array}$$

De plus, comme les substitutions doivent appartenir à la classe de celles que nous étudions, nous avons

$$\begin{aligned} c_0 &\equiv D a_2, & d_0 &\equiv D b_2, \\ c_1 &\equiv D a_3, & d_1 &\equiv D b_3, \\ c_2 &\equiv a_0, & d_2 &\equiv b_0, \\ c_3 &\equiv a_1, & d_3 &\equiv b_1, \end{aligned}$$

et, par suite, nous avons, soit

$$\text{(I)}\quad \begin{vmatrix} a_0 \equiv 1 & a_1 \equiv 0 & a_2 \equiv 0 & a_3 \equiv 0 \\ b_0 \equiv 0 & b_1 \equiv 1 & b_2 \equiv 0 & b_3 \equiv 0 \\ c_0 \equiv 0 & c_1 \equiv 0 & c_2 \equiv 1 & c_3 \equiv 0 \\ d_0 \equiv 0 & d_1 \equiv 0 & d_2 \equiv 0 & d_3 \equiv 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D \text{ quelconque,}$$

soit

$$\text{(II)}\quad \begin{vmatrix} a_0 \equiv 1 & a_1 \equiv 0 & a_2 \equiv 0 & a_3 \equiv 0 \\ b_0 \equiv 0 & b_1 \equiv 1 & b_2 \equiv 0 & b_3 \equiv 1 \\ c_0 \equiv 0 & c_1 \equiv 0 & c_2 \equiv 1 & c_3 \equiv 0 \\ d_0 \equiv 0 & d_1 \equiv 0 & d_2 \equiv 0 & d_3 \equiv 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D \text{ pair.}$$

Remarquons, en outre, que les conditions

$$\begin{aligned} (ab)_{01} - D(ab)_{23} &= \pm 1, \\ (ab)_{12} + (ab)_{03} &= 0 \end{aligned}$$

doivent être satisfaites. Or, dans les substitutions (II), la seconde condition ne peut être satisfaite. On doit donc rejeter les substitutions de ce type.

Pour savoir si les conditions trouvées (I) sont suffisantes, il suffit d'examiner ce que deviennent x, λ, μ quand on leur applique une telle substitution.

On sait par la théorie de la transformation linéaire que chaque fonction $\mathfrak{S}$ se reproduit, multipliée par un facteur de la forme

$$\mathfrak{C} e^{-\frac{i\pi}{4}\omega'},$$

ω' étant un nombre entier dont l'expression générale a été donnée au début de cette Partie; $\mathfrak{C}$ une constante commune à toutes les fonctions $\mathfrak{S}$ et que, par suite, on peut laisser de côté.

En calculant les facteurs qui s'introduisent, de ce chef, dans les nouvelles expressions de x, λ, μ, on trouve respectivement, en n'écrivant que le ré-

sidu de leur exposant suivant le mod 8,

$$+ i\pi D \frac{a_0 b_1 - a_1 b_1}{2},$$

$$+ i\pi D \frac{a_0 b_2 - a_2 b_1}{2},$$

$$+ i\pi D \frac{b_2}{2},$$

si D est pair, $\varkappa$, λ, μ se reproduisent; donc, les conditions (I) caractérisent entièrement, dans ce cas, le sous-groupe qui laisse les modules de Richelot invariables.

Si D est impair, pour que $\varkappa$, λ, μ soient invariables, il faut que l'on ait en plus

$$a_2 \equiv 0, \qquad b_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, 4).$$

De plus, ces deux classes de substitutions forment des groupes.

47. On peut également voir ce que deviennent, par les substitutions du groupe, les invariants de la forme binaire du sixième ordre qui intervient en dénominateur dans les intégrales de notre système de fonctions hyperelliptiques. On déduit de cette étude trois nouvelles fonctions particulières du groupe, qui s'expriment ainsi au moyen de ces invariants.

Fonctions du groupe en général.

48. Mais arrivons aux fonctions du groupe, considérées en général, et en suivant la méthode de formation indiquée par M. Picard dans son Mémoire *Sur la théorie des fonctions hyperabéliennes*.

Il sera commode, dans ce qui va suivre, d'avoir à la place des deux demi-plans positifs pour ξ et η deux cercles c et c' décrits de l'origine comme centre avec des rayons égaux à l'unité, c dans le plan des ξ, c' dans le plan des η. A cet effet, effectuons sur toutes nos substitutions la substitution suivante

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{array}{c|l} \xi & \dfrac{i}{2}\,\dfrac{\xi_1 + i}{\xi_1 - i}, \\[2ex] \eta & \dfrac{i}{2}\,\dfrac{\eta_1 + i}{\eta_1 - i}. \end{array}$$

Comme son déterminant est égal à 1, les déterminants

$$ad - bc, \quad lq - mp$$

resteront égaux à 1 et les conditions $\xi'' > 0$, $\eta'' > 0$ seront remplacées par les suivantes

$$\xi_1'^2 + \xi_1''^2 - 1 < 0 \quad \text{et} \quad \eta_1'^2 + \eta_1''^2 - 1 < 0,$$

c'est-à-dire que les points ξ et η devront être à l'intérieur des cercles désignés par c et c'.

Les cinq substitutions fondamentales deviennent

$$T^{-1}\alpha T = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}, \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}; \frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}+1, \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}-1\right),$$

$$T^{-1}\beta T = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}, \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}; \frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}-\sqrt{D}, \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}-\sqrt{D}\right),$$

$$T^{-1}\gamma T = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}, \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}; -\frac{1}{\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}}, -\frac{1}{\frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}}\right),$$

$$T^{-1}\delta T = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}, \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}; h_0\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}, h\frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}\right),$$

$$T^{-1}\varepsilon T = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}, \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}; \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}, \frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}\right),$$

où l'on a posé

$$h_0 = a - c\sqrt{D}, \qquad h = a + c\sqrt{D}.$$

49. Cela étant, considérons, avec M. Picard, une fonction de deux variables

$$R(\xi_1, \eta_1),$$

rationnelle et holomorphe, tant que ξ et η sont à l'intérieur ou sur la circonférence des cercles c et c'.

Formons, pour toutes les substitutions de notre groupe qui sont du type (A), l'expression

$$R\left(\frac{a\xi_1+b}{c\xi_1+d}, \frac{a'\eta_1+b'}{c'\eta_1+d'}\right)(c\xi_1+d)^{-2m}(c'\eta_1+d')^{-2m},$$

qui peut s'écrire

$$R[f(\xi_1), F(\eta_1)]\left[\frac{D(f, F)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m.$$

Formons de même, pour les substitutions du type (B), l'expression

$$R\left(\frac{\alpha'\eta_1+\beta'}{\gamma'\eta_1+\delta'}, \frac{\alpha\xi_1+\beta}{\gamma\xi_1+\delta}\right)(\gamma\eta_1+\delta)^{-2m}(\gamma'\xi_1+\delta')^{-2m},$$

qui peut s'écrire

$$R[F(\eta_1), f(\xi_1)]\left[\frac{D(F, f)}{D(\xi, \eta)}\right]^m.$$

Dans ces expressions, m désigne un nombre entier supérieur à l'unité. Faisons la somme de toutes ces expressions pour les substitutions du groupe. Nous obtenons une série

$$\sum R(f, F)\left[\frac{D(f, F)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m + \sum R(F, f)\left[\frac{D(F, f)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m.$$

Nous allons montrer qu'elle est absolument convergente pour les valeurs de ξ_1 et η_1 situées à l'intérieur des cercles c et c'.

Commençons par remarquer qu'on peut trouver, en vertu des hypothèses faites sur $R(\xi_1, \eta_1)$, un nombre positif M, tel que l'on ait, quelle que soit la substitution $(\xi_1, \eta_1; f, F)$,

$$|R[f(\xi_1). F(\eta_1)]| < M$$

et aussi

$$|R[F(\eta_1). f(\xi_1)]| < M.$$

Il en résulte que les modules des termes de la série considérée sont respectivement inférieurs à

$$M|(c\xi_1 + d)^{-2m}(c'\eta_1 + d')^{-2m}|,$$

$$M|(\gamma\eta_1 + \delta)^{-2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{-2m}|,$$

et que, pour établir la convergence de la série considérée, il suffit de montrer que la suivante

$$\sum|(c\xi_1 + d)^{-2m}(c'\eta_1 + d')^{-2m}| + \sum|(\gamma\eta_1 + \delta)^{-2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{-2m}|$$

est convergente.

A cet effet, considérons un système de valeurs (ξ, η), ξ étant à l'intérieur de c, η à l'intérieur de c'.

Puisque le groupe est discontinu, on peut considérer, autour de (ξ, η), un domaine δ assez petit pour que tous les domaines transformés de δ par les substitutions du groupe n'aient aucun point commun entre eux et avec δ.

Posons alors

$$\xi_1 = \xi'_1 + i\xi''_1, \qquad \eta_1 = \eta'_1 + \eta''_1,$$

et envisageons l'intégrale quadruple

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int d\xi'_1\, d\xi''_1\, d\eta'_1\, d\eta''_1$$

étendue à chacun de ces domaines transformés de δ.

La somme de ces intégrales est finie, car ces intégrales sont toutes positives comme exprimant des produits d'aires et, en outre, leur somme est moindre que le produit des aires des deux cercles c et c'.

Or, comme chacun des domaines correspond au domaine δ par une des substitutions du groupe, on peut n'avoir, comme somme de toutes ces intégrales, qu'une intégrale étendue au seul domaine δ. On trouve ainsi

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{(\delta)} \Big\{ \sum [\mathfrak{M}(c\xi_1 + d)(c'\eta_1 + d')]^{-2} + \sum [\mathfrak{M}(\gamma\eta_1 + \delta)(\gamma'\xi_1 + \delta')]^{-2} \Big\} d\xi'_1\, d\xi''_1\, d\eta'_1\, d\eta''_1;$$

comme cette intégrale est comprise entre des limites finies, on en conclut que la série considérée est convergente pour $m \geqq 2$ et que la convergence est absolue.

50. La fonction Θ_1, dont nous venons de démontrer l'existence, est holomorphe pour toutes les valeurs des variables ξ_1 et η_1 comprises à l'intérieur des cercles c et c'. De plus, si l'on effectue sur les variables ξ_1, η_1 une substitution quelconque du groupe, chaque terme de la série se change en un autre terme de la même série, multiplié par

$$(c\xi_1 + d)^{2m}(c'\eta_1 + d)^{2m}$$

ou

$$(\gamma\eta_1 + \delta)^{2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{2m},$$

suivant que la substitution opérée est du type (A) ou du type (B). On a donc, suivant les cas :

$$\Theta_1\left(\frac{a\xi_1 + b}{c\xi_1 + d}, \frac{a'\eta_1 + b'}{c'\eta_1 + d'}\right) = (c\xi_1 + d)^{2m}(c'\eta_1 + d)^{2m}\,\Theta_1(\xi, \eta),$$

$$\Theta_1\left(\frac{\alpha\eta_1 + \beta}{\gamma\eta_1 + \delta}, \frac{\alpha'\xi_1 + \beta'}{\gamma'\xi_1 + \delta'}\right) = (\gamma\eta_1 + \delta)^{2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{2m}\,\Theta_1(\xi, \eta).$$

51. On pourrait craindre que les fonctions Θ_1 fussent identiquement nulles. C'est un point que M. Picard a examiné en détail dans le cas ana-

logue des fonctions hyperfuchsiennes (*Act. math.*, t. V) et sa méthode s'applique également au cas présent.

Considérons, en effet, le point $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$ et supposons, en premier lieu, qu'il n'y ait que la substitution unité qui transforme ce point en lui-même. Nous pourrons construire, autour du point ($\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$), un domaine assez petit pour qu'à tout point de ce domaine corresponde des points (ξ'_1, η'_1), tels qu'on ait

$$(\eta'_1 - \eta'_{10})(\xi'_{10} - \xi'_1) < (\eta_1 - \eta_{10})(\xi_{10} - \xi_1),$$

en posant

$$\xi'_1 = \frac{a\xi_1 + b}{c\xi_1 + d}, \qquad \eta' = \frac{a'\eta_1 + b'}{c'\eta_1 + d'};$$

comme on a

$$(\eta'_1 - \eta'_{10})(\xi'_{10} - \xi'_1) = \frac{1}{|(c\xi_1 + d)^2 (c'\eta_1 + d')^2|}(\eta_1 - \eta_{10})(\xi_{10} - \xi_1),$$

on en conclura

$$|(c\xi_1 + d)^2 (c'\eta_1 + d')^2| > 1,$$

et la série définissant Θ_1 pourra s'écrire

$$\begin{aligned} R(\xi_1, \eta_1) &+ \sum R(\xi'_1, \eta'_1) \frac{1}{(c\xi_1 + d)^{2m}(c'\eta_1 + d')^{2m}} \\ &+ \sum R(\xi'_1, \eta'_1) \frac{1}{(\gamma\eta_1 + \delta)^{2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{2m}}, \end{aligned}$$

car on a une conclusion analogue pour les substitutions du type (B); les Σ de la formule précédente portant sur toutes les substitutions sauf la substitution unité. Si m est assez grand, l'expression précédente différera peu de $R(\xi, \eta)$ et ne sera donc pas identiquement nulle.

S'il y a N substitutions changeant le point ($\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$) en lui-même, la même conclusion s'impose. On peut, en effet, dans la série, mettre à part les termes correspondant à ces substitutions. On obtient

$$\sum R(\xi'_1, \eta'_1) \frac{1}{(c\xi_1 + d)^{2m}(c'\eta_1 + d')^{2m}} + \sum R(\xi'_1, \eta'_1) \frac{1}{(\gamma\eta_1 + \delta)^{2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{2m}}.$$

On a

$$|dd'| = 1, \qquad |\delta\delta'| = 1,$$

et, pour $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, ces termes deviennent

$$R(0, 0)\left[\sum \frac{1}{(dd')^{2m}} + \sum \frac{1}{(\delta\delta')^{2m}}\right],$$

quantité qui pourra toujours être considérée comme non identiquement nulle, puisque $R(o, o)$ et m sont arbitraires.

52. On peut également démontrer que, m étant suffisamment grand, on peut toujours trouver deux fonctions Θ_1 et Θ_2 dont le rapport ne soit pas constant.

A cet effet, formons l'expression

$$\Theta_1(\xi_1, \eta_1)\,\Theta'_1(\xi'_1, \eta'_1) - \Theta_1(\xi'_1, \eta'_1)\,\Theta'_1(\xi_1, \eta_1),$$

(ξ_1, η_1), (ξ'_1, η'_1) étant deux points arbitraires.

En supposant, comme tout à l'heure, que le point $(\xi_1 = o, \eta_1 = o)$ ne soit altéré que par la substitution unité, on voit que (ξ_1, η_1), (ξ'_1, η'_1) étant dans le domaine construit autour de $(\xi_1 = o, \eta_1 = o)$, on a, pour l'expression ci-dessus, une valeur peu différente de

$$R_1(\xi_1, \eta_1)\,R'_1(\xi'_1, \eta'_1) - R_1(\xi'_1, \eta'_1)\,R'_1(\xi_1, \eta_1),$$

si m est assez grand. Si donc, R_1 et R'_1 sont arbitraires, cette valeur n'est pas identiquement nulle.

On arrive à la même conclusion, si l'on suppose qu'il y ait N substitutions conservant le point $(\xi_1 = o, \eta_1 = o)$.

Enfin, en examinant de la même manière le déterminant fonctionnel de deux fonctions

$$F_1(\xi_1, \eta_1) = \frac{\Theta_1(\xi_1, \eta_1)}{\Theta'_1(\xi_1, \eta_1)}, \qquad F_2(\xi_1, \eta_1) = \frac{\Theta_2(\xi_1, \eta_1)}{\Theta'_2(\xi_1, \eta_1)},$$

on établit que toutes les fonctions F ne sont pas fonctions de l'une d'entre elles, si les fonctions rationnelles R sont arbitraires.

En résumé, nous voyons donc qu'il existe sûrement des fonctions

$$F(\xi_1, \eta_1) = \frac{\Theta_1(\xi_1, \eta_1)}{\Theta'_1(\xi_1, \eta_1)}$$

invariables par toutes les substitutions du groupe. Il suffit que Θ_1 et Θ'_1 correspondent à la même valeur du nombre entier m.

53. Exprimons la fonction Θ, au moyen des anciennes variables ξ et η. Posons

$$\frac{i}{2}\,\frac{f_j(\xi_1) + i}{f_j(\xi_1) - i} = \varphi_j(\xi_1),$$

$$\frac{i}{2}\,\frac{F_j(\eta_1) + i}{F_j(\eta_1) - i} = \Phi_j(\eta_1),$$

la substitution $[\xi_1, \eta_1, f_j(\xi_1), F_j(\eta_1)]$ étant une substitution quelconque du groupe et du type A.

On a

$$\frac{D(f_j, F_j)}{D(\xi_1, \eta_1)} = \frac{D(f_j, F_j)}{D(\varphi_j, \Phi_j)} \frac{D(\varphi_j, \Phi_j)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\xi, \eta)}{D(\xi_1, \eta_1)},$$

mais

$$\frac{D(f_j, F_j)}{D(\varphi_j, \Phi_j)} = \frac{1}{\left(-\varphi_j + \frac{i}{2}\right)^2 \left(-\Phi_j + \frac{i}{2}\right)^2},$$

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(\xi_1, \eta_1)} = \frac{1}{(\xi_1 - i)^2} \frac{1}{(\eta_1 - i)^2} = \left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^2 \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^2,$$

et l'on aura des résultats analogues pour les substitutions du type B. Il en résulte que l'on aura

$$\Theta_1(\xi_1, \eta_1) = \left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^{2m} \Theta(\xi, \eta),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \eta) = & \sum R(f_j, F_j) \frac{1}{\left(-\varphi_j + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\Phi_j + \frac{i}{2}\right)^{2m}} \left[\frac{D(\varphi_j, \Phi_j)}{D(\xi, \eta)}\right]^m \\ & + \sum R(F_k, f_k) \frac{1}{\left(-\Phi_k + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\varphi_k + \frac{i}{2}\right)^{2m}} \left[\frac{D(\Phi_k, \varphi_k)}{D(\xi, \eta)}\right]^m. \end{aligned}$$

$\Theta(\xi, \eta)$ est manifestement une fonction de la même nature que $\Theta_1(\xi_1, \eta_1)$ c'est-à-dire qui se reproduit, multipliée par $\left[\frac{D(\varphi_i, \Phi_i)}{D(\xi, \eta)}\right]^m$, quand on y remplace ξ et η respectivement par φ_i et Φ_i.

Comme on a, de plus,

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \eta) = & \sum R(f_j, F_j) \left[\frac{D(f_j, F_j)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m \frac{1}{\left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^{2m}} \\ & + \sum R(F_k, f_k) \left[\frac{D(F_k, f_k)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m \frac{1}{\left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^{2m}}. \end{aligned}$$

On voit que $\Theta(\xi, \eta)$ tend vers o quand ξ et η croissent sans limite, car la série est convergente, et chaque terme tend vers zéro.

54. Ainsi que nous l'avons vu, il y a trois substitutions du groupe laissant invariable le point à l'infini A du domaine fondamental. Ce sont les

substitutions

$$(\xi, \eta; \xi + 1, \quad \eta - 1),$$
$$(\xi, \eta; \xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}),$$
$$(\xi, \eta; h_0\xi, h\eta).$$

Il en résulte que l'on doit avoir

$$\Theta(\xi + 1, \eta - 1) = \Theta(\xi, \eta),$$
$$\Theta(\xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}) = \Theta(\xi, \eta),$$
$$\Theta(h_0\xi, h\eta) = \Theta(\xi, \eta).$$

Prenant comme variables $\xi + \eta = u$, $\xi - \eta = v$, les trois substitutions relatives au sommet A deviennent

$$(u, v; u, v + 2),$$
$$(u, v; u - 2\sqrt{D}, v),$$
$$(u, v; au - c\sqrt{D}\, v, -c\sqrt{D}\, u + av),$$

et les trois équations fonctionnelles correspondantes sont

$$\Theta(u, v) = \Theta(u, v + 2),$$
$$\Theta(u, v) = \Theta(u - 2\sqrt{D}, v),$$
$$\Theta(u, v) = \Theta(au - c\sqrt{D}\, v, -c\sqrt{D}\, u + av).$$

Rappelons de plus qu'au sommet A on a

ζ_1, η_1 comprises entre des limites finies,

$$\lim \xi_2 = \infty, \qquad \lim \eta_2 = \infty$$

et

$\frac{\xi_2}{\eta_2} = \zeta$ comprise entre deux limites finies, comprenant entre elles l'unité.

Il en résulte que l'on a

u_1 et v_1 comprises entre des limites finies,

$$\lim u_2 = \lim \eta_2(\zeta + 1) = \infty,$$
$$\lim v_2 = \lim \eta_2(\zeta - 1) = \infty.$$

Le signe de u_2 est toujours le même, mais celui de v_2 peut varier.

Il importe donc de considérer autour du point A trois régions

$$
\begin{aligned}
&1^{\circ} \text{ région} \ldots\ldots & \zeta - 1 &> \delta,\\
&2^{\circ} \ldots\ldots\ldots\ldots & \zeta - 1 &< -\delta,\\
&3^{\circ} \ldots\ldots\ldots\ldots & -\delta < \zeta &- 1 < \delta,
\end{aligned}
$$

δ étant une quantité positive déterminée, aussi petite que l'on veut.

Si un point variable s'approche du point A, en restant dans la première région, v_2 finit toujours par demeurer positive; en restant dans la seconde région, v_2 est toujours négative si l'on est assez voisin de A; et, si le point variable est dans la troisième région, v_2 est soit positive soit négative.

Posons

$$e^{i\pi v} = y.$$

Dans le voisinage du point A et dans la première région, comme la partie réelle de $i\pi v$ est $-\pi\eta_2(\zeta-1)$, y tend dans ces conditions vers zéro et l'on en conclut que la fonction holomorphe Θ est développable en série convergente suivant les puissances positives de y, c'est-à-dire de $e^{i\pi v} = e^{i\pi(\xi-\eta)}$. On a donc

$$\Theta(u, v) = \Theta_0(u) + \Theta_1(u)\, e^{i\pi v} + \ldots + \Theta_n(u)\, e^{ni\pi v} + \ldots,$$

$\Theta_n(u)$ étant une fonction holomorphe en u, qui satisfait, d'après la seconde équation fonctionnelle, à la condition

$$\Theta_n(u) = \Theta_n(u - 2\sqrt{D}),$$

et comme, au voisinage du point A, le coefficient de u_2 a toujours le même signe $+1$, on en conclut, comme plus haut,

$$\Theta_n(u) = A_{0n} + A_{1n}\, e^{\frac{i\pi}{\sqrt{D}}u} + A_{2n}\, e^{\frac{2i\pi}{\sqrt{D}}u} + \ldots + A_{m,n}\, e^{\frac{mi\pi}{\sqrt{D}}u} + \ldots.$$

On a donc, en définitive, au voisinage du point A, dans la première région, un développement de la forme

$$(1) \qquad \Theta(\xi, \eta) = \sum_{0}^{\infty}{}_{m} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} A_{m,n}\, e^{\frac{mi\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)}\, e^{ni\pi(\xi-\eta)},$$

$\sqrt{D}$ ayant sa valeur arithmétique et les coefficients $A_{m,n}$ possédant la propriété que nous allons indiquer.

Le terme général de cette série peut s'écrire

$$A_{m,n}e^{\frac{mi\pi}{\sqrt{D}}u+ni\pi v}.$$

Si nous effectuons, dans ce terme, la troisième substitution relative au point A, nous obtenons

$$A_{m,n}e^{\frac{i\pi}{\sqrt{D}}(ma-ncD)u+i\pi(-mc+na)v}.$$

Si nous écrivons maintenant que la troisième équation fonctionnelle est satisfaite, il faut écrire que les coefficients des mêmes puissances de e sont égales. Or, prenons le terme d'indices m et n dans le premier développement et le terme d'indices m' et n' dans le développement transformé. Pour que les puissances de e soient les mêmes, on devra avoir

$$m = m'a - n'cD,$$
$$n = -m'c + n'a$$

ou

$$m' = ma + ncD,$$
$$n' = na + mc,$$

ce qui montre qu'à un terme du second développement ne correspond un terme du premier, de même exposant de e que si l'on a entre les indices m', n' les relations

$$m'a - n'cD > 0, \quad -m'c + n'a > 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{cD}{a} < \frac{m'}{n'} < \frac{a}{c}.$$

Comme, d'autre part, à tout terme du premier développement correspond un terme dans le second développement, on en conclut que tout coefficient $A_{m,n}$ dans lequel les indices ne satisfont pas aux inégalités

$$\frac{cD}{a} < \frac{m}{n} < \frac{a}{c}$$

est nul.

Comme toute fraction de la forme

$$\frac{\lambda cD + \mu a}{\lambda a + \mu c},$$

λ et μ étant des entiers positifs, est comprise entre $\frac{cD}{a}$ et $\frac{a}{c}$, on s'assure

qu'il y a une infinité de coefficients $A_{m,n}$ non nuls et une infinité de tels coefficients nuls et, de plus, que les plus petites valeurs de m et n pour lesquelles le coefficient correspondant n'est pas nul, sont

$$m = cD \qquad \text{et} \qquad n = a;$$

par exemple, si $D = 5$, on a

$$m = 72, \qquad n = 161,$$

de telle sorte que la série Θ a un facteur qui est, dans ce cas particulier de $D = 5$,

$$e^{\frac{72 i\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta) + 161 i\pi(\xi-\eta)}.$$

Dans la seconde région, des considérations tout à fait identiques nous montrent que l'on a le développement analogue,

$$(2) \qquad \Theta(\xi, \eta) = \sum_{0}^{\infty}{}_{m} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} A_{m,n}\, e^{\frac{m i\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)} e^{-n i\pi(\xi-\eta)},$$

les coefficients $A_{m,n}$ jouissant des mêmes propriétés que dans le développement (1).

55. Reste la troisième région. Dans sa *Théorie des fonctions fuchsiennes*, M. Poincaré a démontré qu'on pouvait modifier le domaine fondamental R_0 de la manière suivante : On en retranche une région S_0 et l'on ajoute, par compensation, la transformée $S_{0,p}$ de S_0 par une substitution déterminée $[z, f_p(z)]$, choisie arbitrairement dans le groupe.

Nous pouvons appliquer ici autour du point A le même procédé, en prenant pour S_0 la troisième région définie par

$$-\delta < \zeta - 1 < \delta,$$

et en choisissant la substitution

$$[\xi, \eta; (a - c\sqrt{D})^p \xi, (a + c\sqrt{D})^p \eta],$$

de manière que la région $S_{0,p}$ n'empiète pas sur les deux premières régions définies plus haut.

La région $S_{0,p}$ est définie par les inégalités

$$(1-\delta)\left(\frac{a+c\sqrt{D}}{a-c\sqrt{D}}\right)^p < \zeta < (1+\delta)\left(\frac{a+c\sqrt{D}}{a+c\sqrt{D}}\right)^p$$

ou

$$\frac{(1-\delta)(a+c\sqrt{D})^p-(a-c\sqrt{D})^p}{(a-c\sqrt{D})^p}<\zeta-1<\frac{(1+\delta)(a+c\sqrt{D})^p-(a-c\sqrt{D})^p}{(a-c\sqrt{D})^p}.$$

On voit que, si l'on choisit δ assez petit d'une part, et p assez grand d'autre part, $\zeta-1$ aura dans la région $S_{0,p}$ un signe constant, et cette région n'aura aucune partie commune avec les régions utilisées plus haut

$$\zeta-1>\delta \quad \text{et} \quad \zeta-1<-\delta.$$

Dans le cas particulier considéré plus haut où $D=5$, on a

$$(a+c\sqrt{D})^p=(9+4\sqrt{5})^{2p}=(321,992\ldots)^p,$$
$$(a-c\sqrt{D})^p=(9-4\sqrt{5})^{2p}=(\quad 0,008\ldots)^p,$$

car 9 et 4 sont les plus petites solutions de l'équation de Pell

$$x^2-5y^2=1,$$

et l'on a

$$a+c\sqrt{D}=(9+4\sqrt{5})^2, \qquad a-c\sqrt{D}=(9-4\sqrt{5})^2;$$

$S_{0,p}$ est donc définie par

$$(40249)^p-1-\delta(40249)^p<\zeta-1<(40249)^p-1+\delta(40249)^p,$$

inégalités qui montrent bien que l'on peut faire pour δ et p le choix indiqué.

On aura donc, autour de A, une région où $\zeta-1$ gardera un signe constant et dans laquelle on pourra représenter $\Theta(\xi, \eta)$ par un développement de la forme (1) ou de la forme (2).

56. Cela étant, considérons deux fonctions $\Theta(\xi, \eta)$, $\Theta'(\xi, \eta)$ correspondant à deux fonctions rationnelles R et R′ indépendantes l'une de l'autre et à un même nombre entier m.

Nous allons démontrer que, dans le domaine fondamental du groupe, elles ne peuvent avoir qu'un nombre fini de racines communes, ne formant pas un *continuum*.

Il ne peut y avoir de doutes sur cette proposition qu'au voisinage du point A où les racines pourraient peut-être se condenser en un nombre infini.

Mais considérons la première région $\zeta-1>\delta$. Pour des points (ξ, η)

situés dans cette région, on a

$$\Theta\,(\xi,\eta) = e^{\frac{pi\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+qi\pi(\xi-\eta)}\left(A_{p,q} + A_{p_1 q_1}\, e^{\frac{p_1\pi i}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+q_1 i\pi(\xi-\eta)} + \ldots\right),$$

$$\Theta'(\xi,\eta) = e^{\frac{pi\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+qi\pi(\xi-\eta)}\left(A'_{p,q} + A'_{p'_1 q'_1}\, e^{\frac{p'_1\pi i}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+q'_1 i\pi(\xi-\eta)} + \ldots\right),$$

le facteur étant le même dans les deux développements, car il ne dépend que du nombre entier D.

Ces fonctions admettent d'abord les racines communes qu'on obtient en égalant ce facteur à o. On trouve ainsi le point A. Ce facteur mis de côté, comme il ne peut y en avoir d'autres, puisque $A_{p,q}$, $A'_{p,q}$ sont des constantes différentes de zéro, les développements en série, contenus entre crochets, ne peuvent avoir qu'un nombre fini de racines communes, dans lesquelles ξ et η ont des valeurs aussi voisines qu'on veut de celles qui correspondent au point A.

Si l'on considère les développements correspondant à la seconde région ou à la région transformée de la troisième, les conclusions restent les mêmes.

57. En répétant, sans y rien changer, un raisonnement fait par M. Picard dans sa *Théorie des fonctions hyperfuchsiennes* (*A. M.*, t. V, p. 175), on voit que ce nombre fini de racines est indépendant des fonctions rationnelles R et R′ et ne dépend que du groupe considéré et du nombre *m*.

58. On conclut de là que *trois* quelconques des fonctions du groupe sont liées algébriquement, car les valeurs de deux de ces fonctions étant fixées, il en résulte pour la troisième un nombre limité de valeurs.

On démontre également sans peine qu'on peut exprimer rationnellement toutes les fonctions du groupe à l'aide de trois d'entre elles, liées par une relation algébrique. Former effectivement de telles relations algébriques, même dans les cas les plus particuliers, paraît un problème difficile. On voit, en effet, que les fonctions que nous considérons, les fonctions dérivées des fonctions ϑ par exemple, ne sont fonctions de deux variables que par l'intermédiaire du nombre entier D, et l'on conçoit que la présence de cet entier rende impossible, d'une manière générale, les éliminations qu'il faudrait effectuer pour obtenir la relation algébrique.

Le théorème qui précède montre, en outre, l'importance de l'étude de quelques fonctions particulières du groupe, puisqu'à l'aide d'entre elles, on peut exprimer toutes les autres.

SUR LES

PROPRIÉTÉS THERMIQUES DES FLUIDES SATURÉS,

PAR M. E. MATHIAS,

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.

1. *Détente adiabatique des vapeurs saturées.* — Soit un poids, égal à 1gr, d'une vapeur saturée sèche; à la température absolue $\theta = 273 + t$, le volume est v et le titre $x = 1 - \varepsilon$. La théorie montre (1) que, pour une variation dv du volume, la variation *adiabatique* dx du titre est donnée par

$$\frac{dv}{dx} = u' - u - \frac{L}{m'}\frac{du'}{d\theta}, \tag{1}$$

m' étant la chaleur spécifique de la vapeur saturée à $\theta°$, L la chaleur de vaporisation, u' et u les volumes spécifiques de la vapeur saturée et du liquide saturé à la même température.

Pour les températures extérieures aux points d'inversion de m', ($m' < 0$), le signe du second membre de l'équation (1) n'est pas apparent, celui-ci se présentant sous la forme d'une différence. Les expériences calorimétriques que j'ai faites sur l'acide sulfureux permettent, au moins pour ce corps, de lever l'incertitude, comme le montre ce Tableau :

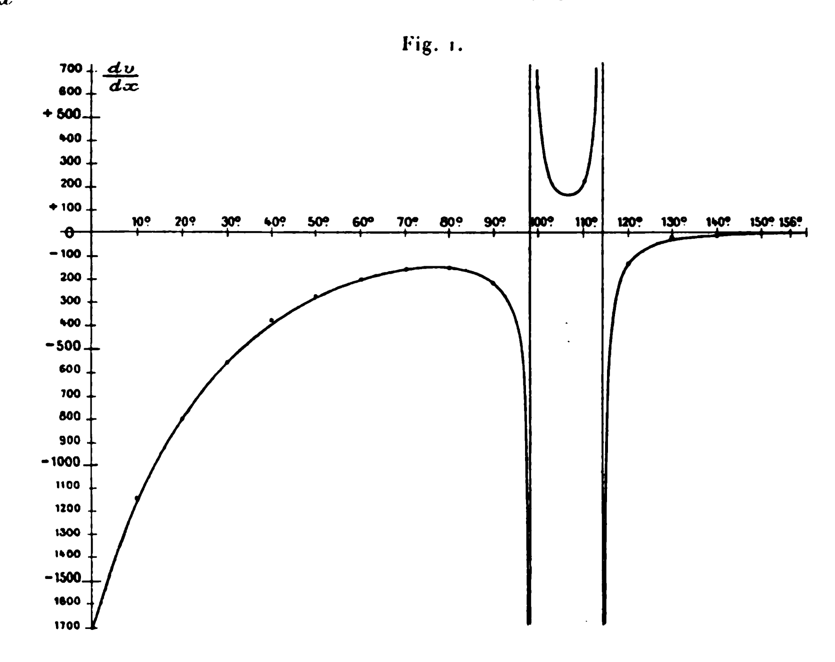
$t°$.	m'.	$u' - u$.	$\frac{L}{m'}\frac{du'}{d\theta}$.	$\frac{dv}{dx}$.
0°	−0,410	+220,05	+1967,5	−1747,45
10	−0,390	152,20	+1294,1	−1141,9
20	−0,357	106,23	+ 907,3	− 801,1
30	−0,330	75,31	+ 638,2	− 562,9
40	−0,300	54,20	+ 443,5	− 389,3
50	−0,270	40,90	+ 313,4	− 272,5

(1) Voir LIPPMANN, *Thermodynamique*, p. 174.

t^o.	m'.	$u' - u$.	$\frac{L}{m'}\frac{du'}{d\theta}$.	$\frac{dv}{dx}$.
60°	−0,235	31,30	+ 237,5	− 206,2
70	−0,205	24,95	+ 182,9	− 158,0
80	−0,165	19,95	+ 176,4	− 156,4
90	−0,095	15,67	+ 239,5	− 223,8
1er point d'inversion.	0	»	$\pm\infty$	$\mp\infty$
100	+0,027	12,19	− 637,2	+ 649,0
110	+0,062	9,40	− 207,3	+ 216,7
2e point d'inversion.	0	»	$\mp\infty$	$\pm\infty$
120	−0,078	7,11	+ 122,1	− 115,0
130	−0,306	5,21	+ 23,4	− 18,2
140	−0,620	3,49	+ 8,38	− 4,89
145	−0,848	2,69	+ 4,88	− 2,19
150	−1,253	+ 1,96	+ 2,62	− 0,66

Si l'on porte en abscisses les températures et en ordonnées les valeurs de $\frac{dv}{dx}$, on obtient la courbe figurée ci-après (*fig.* 1).

Fig. 1.



De l'examen du Tableau et de la courbe résultent les conséquences suivantes :

1° *Aux températures inférieures au premier point d'inversion,* $\frac{dv}{dx}$ reste toujours négatif mais *passe par un maximum* vers 75°, la variation dx du titre étant alors la plus grande possible pour une même variation dv du volume.

Pour les températures décroissantes fort éloignées du premier point d'inversion, comme pour les températures croissantes qui en sont très voisines, la variation du titre tend vers zéro pour une même variation dv du volume.

2° *Aux températures supérieures au deuxième point d'inversion,* $\frac{dv}{dx}$ reste toujours négatif comme m', mais *tend vers zéro* lorsque la température tend vers sa valeur critique. Dans une grande partie de l'intervalle compris entre le second point d'inversion et la température critique, la valeur absolue de $\frac{dv}{dx}$ reste très petite, un petit accroissement de volume produisant une condensation très abondante de la vapeur.

Visiblement, la courbe $\frac{dv}{dx} = f(\theta)$ admet, au point critique, une tangente très voisine de l'axe des abscisses.

Ainsi, conformément aux conclusions de Clausius [1], $\frac{dv}{dx}$ est toujours du signe de m'. Il s'ensuit que $\frac{dv}{d\theta}$ [2], qui est égal à

$$-\frac{m'}{L}\left(u' - u - \frac{L}{m'}\frac{du'}{d\theta}\right),$$

est toujours négatif et que *la détente adiabatique d'une vapeur saturée produit toujours un abaissement de température.*

2. *Chaleur spécifique, à volume constant, des fluides saturés.* — La théorie des propriétés thermiques des fluides saturés ne peut être faite qu'à la faveur d'une hypothèse sur une chaleur spécifique [3]. Celle de M. Raveau, qui conduit à des conséquences que j'ai vérifiées, suppose que la chaleur spécifique, *à volume constant,* des fluides saturés reste finie même à la température critique. Mes expériences sur l'acide sulfureux permettent de démontrer directement l'exactitude de cette hypothèse qui est d'accord avec la construction géométrique de Dahlander (*Journ. de Phys.,* [2], t. VIII, p. 323; 1889).

---

(1) *Voir* Clausius, *Théorie mécanique de la chaleur,* p. 172. Trad. Folie et Ronkar.

(2) *Voir* Lippmann, *loc. cit.,* p. 175.

(3) On a supposé successivement que la chaleur spécifique du liquide saturé (Mathias), puis que la chaleur spécifique à pression constante (Duhem), puis que la chaleur spécifique à volume constant (Raveau, Duhem, L. Natanson) restait finie à la température critique.

La quantité de chaleur qu'il faut fournir à 1gr d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de titre x, pour une transformation infiniment petite, est, en appelant c_x la chaleur spécifique à volume constant et l la chaleur latente de dilatation,

$$dQ = c_x\, d\theta + l\, dv.$$

Soient c_0 et c_1 ce que devient c_x quand, dans son expression, on fait successivement $x = 0$ et $x = 1$. On a

$$(2) \qquad c_x = x c_1 + (1 - x) c_0 = x(c_1 - c_0) + c_0,$$

équation facile à interpréter. Si c_0 et c_1 restent finis toujours, il en sera de même de c_x. Les Tableaux suivants et les courbes qui suivent donnent les valeurs de c_0 et de c_1, pour l'acide sulfureux, calculées par les formules

$$(3) \qquad c_0 = m - l\frac{du}{d\theta}, \qquad c_1 = m' - l\frac{du'}{d\theta}, \qquad l = \frac{L}{u' - u},$$

m désignant la chaleur spécifique du liquide saturé à $\theta°$.

Calcul des valeurs de c_0.

$t°$.	m.	$l\frac{du}{d\theta}$.	c_0.
°	Cal	Cal	Cal
0........	+0,317	+0,0006	+0,316
10........	0,3195	0,0008	0,319
20........	0,324	0,0012	0,323
30........	0,330	0,0016	0,328
40........	0,338	0,0024	0,336
50........	0,347	0,0034	0,344
60........	0,359	0,0046	0,354
70........	0,372	0,0059	0,366
80........	0,387	0,0080	0,379
90........	0,403	0,0113	0,392
100........	0,422	0,0158	0,406
110........	0,442	0,0228	0,419
120........	0,470	0,0359	0,434
130........	0,510	0,0637	0,446
140........	0,620	0,137	0,483
145........	0,720	0,201	0,519
150........	0,872	0,370	0,502
152........	0,980	0,491	0,490
154........	+1,355	+0,776	+0,569

Calcul des valeurs de c_1.

t°.	m'.	$l\frac{du'}{d\theta}$.	c_1.
°	Cal	Cal	Cal
0........	—0,410	—3,666	+3,256
10........	—0,390	3,316	2,926
20........	—0,357	3,049	2,692
30........	—0,330	2,796	2,466
40........	—0,300	2,447	2,147
50........	—0,270	2,069	1,799
60........	—0,235	1,785	1,550
70........	—0,205	1,503	1,298
80........	—0,165	1,459	1,294
90........	—0,095	1,449	1,354
100........	+0,025	1,411	1,438
110........	+0,062	1,367	1,429
120........	—0,078	1,339	1,261
130........	—0,306	1,378	1,072
140........	—0,620	1,489	0,869
145........	—0,848	1,538	0,690
150........	—1,253	1,677	0,424
152........	—1,650	—1,759	+0,109

Aux températures inférieures à 150°, $\frac{du}{d\theta}$ et $\frac{du'}{d\theta}$ sont généralement calculés au moyen des formules

$$\frac{u_{\theta+10}-u_{\theta-10}}{20} \quad \text{et} \quad \frac{u'_{\theta+10}-u'_{\theta-10}}{20}.$$

Au voisinage immédiat de la température critique, on a employé les formules

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{\delta^2}\frac{d\delta}{d\theta}, \qquad \frac{du'}{d\theta}=-\frac{1}{\delta'^2}\frac{d\delta'}{d\theta},$$

les densités δ et δ' étant données au moyen des formules empiriques que j'ai fait connaître, dans un Mémoire antérieur, et qui satisfont à la loi des états correspondants; m, m' et $l=\frac{L}{u'-u}$ sont tirés de mes expériences calorimétriques sur l'acide sulfureux.

L'examen du premier Tableau montre que la chaleur spécifique à volume constant c_0 reste longtemps fort peu différente de la chaleur spécifique m du liquide saturé; elle est positive et plus petite que m et va constamment en croissant jusqu'à la température critique.

Les valeurs un peu irrégulières observées à 150° et 152° sont dues très

probablement à ce que le terme $l\frac{du}{d\theta}$ est un produit dont les deux facteurs sont mal connus au voisinage immédiat du point critique.

Le second Tableau montre que la chaleur spécifique c_1 est toujours positive comme c_0, mais prend aux basses températures des valeurs très élevées qui décroissent d'abord régulièrement lorsque la température s'élève. Vers 75°, c_1 passe par un minimum voisin de $1^{cal},250$ suivi, vers 110°, d'un maximum égal à $1^{cal},43$ environ. A partir de ce maximum, c_1 décroît constamment jusqu'à la température critique.

Les valeurs relatives à 150° et 152° ne sont rapportées sur le deuxième Tableau que pour constater que, malgré l'incertitude des termes de la différence qui donne c_1, on trouve encore une différence positive.

En résumé, on voit donc que c_0 et c_1 *restent toujours finis et positifs* (1).

Remarques théoriques sur c_0 et c_1. — De la relation classique

$$\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\theta}{E}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}$$

on tire immédiatement, en passant de l'état de vapeur saturée à celui du liquide saturé :

$$c_1 - c_0 = A\theta(u' - u)\frac{d^2 p}{d\theta^2}. \tag{4}$$

A la température critique, $u' = u$, donc $c_1 = c_0$.

c_1 et c_0 tendent vers une limite commune au point critique.

Le seul facteur du deuxième membre de (4) qui serait, comme $u' - u$,

---

(1) En d'autres termes, lorsqu'on élève de 1° la température de 1gr de liquide saturé ou de vapeur saturée de manière que la saturation persiste, c_0 et c_1 mesurent le *travail intérieur*, qui est toujours positif, tandis que $l\frac{du}{d\theta}$ ou $l\frac{du'}{d\theta}$ mesurent le *travail extérieur* de dilatation ou de contraction.

Pour la vapeur saturée, extérieurement aux points d'inversion de m', le travail intérieur est légèrement inférieur à la valeur absolue du travail extérieur qui est alors négatif; le contraire se produit entre les deux points d'inversion. Aux points d'inversion, les deux travaux sont égaux et de signes contraires. Tout à fait au voisinage du point critique, le travail intérieur n'est plus que la moitié ou le tiers du travail extérieur.

Pour le liquide saturé, le travail intérieur est presque toujours très grand par rapport au travail extérieur de dilatation et ce n'est qu'au voisinage du point critique que le travail extérieur devient comparable au travail intérieur.

susceptible de s'annuler est $\frac{d^2p}{d\theta^2}$. Or, jusqu'ici, les expérimentateurs qui ont déterminé les pressions de vapeur saturée des différents corps n'ont jamais signalé de point d'inflexion dans la courbe des pressions, rapportée à la température.

Dans les expériences si précises de M. Sydney Young [1], faites sur des corps très purs (pentane normal, isopentane, hexane normal), $\frac{dp}{d\theta}$ est toujours croissant en même temps que la température, même au voisinage le plus immédiat du point critique. Donc $\frac{d^2p}{d\theta^2}$ est toujours positif.

Il en est de même dans les expériences de M. Amagat [2] sur l'acide carbonique, bien que les points représentatifs des pressions relatives à 30°-30°,5-31° et 31°,35 soient rigoureusement en ligne droite, ce qui fait supposer la proximité d'un point d'inflexion, si l'on imagine la courbe des pressions se continuant au delà de la température critique.

On en doit donc conclure que les courbes $c_1 = f(\theta)$ et $c_0 = \varphi(\theta)$ n'ont d'autre point commun que leur point de rencontre à la température critique. Par suite, au-dessous de cette température on a toujours $c_1 > c_0$ et, si l'on se reporte à l'équation (2), on verra que, *à température constante, c_x est une fonction croissante de x.*

Comment se fait le raccordement de c_1 et de c_0 à la température critique?

Pour le voir, dérivons par rapport à θ les deux membres de l'équation (4) : il vient alors

$$\frac{dc_1}{d\theta} - \frac{dc_0}{d\theta} = A(u'-u)\left(\frac{d^2p}{d\theta^2} + \theta\frac{d^3p}{d\theta^3}\right) + A\theta\frac{d^2p}{d\theta^2}\frac{d(u'-u)}{d\theta}.$$

A la température critique $u'-u=0$, $\frac{du'}{d\theta} = -\infty$, $\frac{du}{d\theta} = +\infty$, d'où

$$\lim\frac{dc_1}{d\theta} - \lim\frac{dc_0}{d\theta} = -\infty. \tag{5}$$

La différence des coefficients angulaires des courbes étant infinie à la température critique, il s'ensuit qu'un, au moins, des coefficients angulaires est infini. Donc, l'une au moins des courbes admet alors une tangente

---

(1) S. Young, *Proc. of the Phys. Soc. of London*, Session 1894-95 et *Trans. of the Chem. Soc.*, 1895.

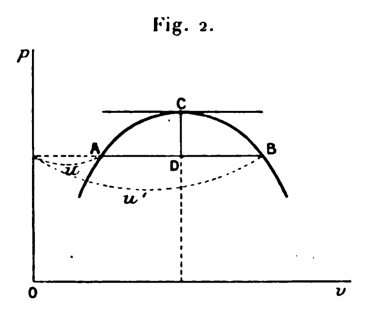
(2) Amagat, *Journal de Physique*, [3], t. I, p. 297; 1892.

parallèle à l'axe des ordonnées; mais l'équation (5) ne dit pas laquelle. Tout ce que l'on connaît du parallélisme étroit des propriétés du liquide saturé et de la vapeur saturée autorise à penser que les deux courbes $c_1 = f(\theta)$, $c_0 = \varphi(\theta)$ se raccordent toutes deux suivant une tangente commune parallèle à l'axe des ordonnées, et à considérer comme impossible l'existence à la température critique d'un point anguleux formé par une tangente parallèle à l'axe des ordonnées avec une tangente oblique à cet axe.

Pour préciser la position des courbes par rapport à la tangente commune, je remarque que, θ et $\frac{d^2p}{d\theta^2}$ étant toujours finis, au voisinage de la température critique, le second membre de l'équation (4), et par suite $c_1 - c_0$, est de l'ordre de $u' - u$. Traçons, dans le plan des pv, la partie de la *courbe de saturation* qui est voisine de son sommet C.

Si $AB = u' - u$ est infiniment petit du premier ordre (voir *fig.* 2),

Fig. 2.



$CD = dp$ est du second ordre, ainsi que $d\theta$, puisque $\frac{dp}{d\theta}$ est toujours fini. Donc, *à une distance de la température critique infiniment petite du second ordre, $c_1 - c_0$ est infiniment petit du premier ordre.*

Il s'ensuit que les courbes qui se raccordent sont de part et d'autre de leur point de jonction et non du même côté, sans quoi on aurait un point de rebroussement du second genre et $c_1 - c_0$ serait du second ordre [1] comme $d\theta$ et dp. Donc, $\lim \frac{dc_0}{d\theta} = +\infty$ et $\lim \frac{dc_1}{d\theta} = -\infty$, ce qui satisfait à l'équation (5).

---

[1] Pour que cette démonstration soit valable, il faut supposer que les courbes $c_1 = f(\theta)$ et $c_0 = \varphi(\theta)$ ont, à la température critique, un *contact du même ordre* avec leur tangente commune, ce qui doit être en vertu du parallélisme de propriétés rappelé plus haut.

Vérification expérimentale des remarques précédentes. — Les limites vers lesquelles tendent séparément c_1 et c_0, à la température critique, sont *finies;* c'est un fait expérimental qui ressort des Tableaux des pages 4 et 5. Sous ce rapport, *l'hypothèse fondamentale de la théorie de M. Raveau est absolument justifiée.*

Comme c_0 est positif et va constamment en croissant quand la température s'élève, sa limite est forcément positive et paraît être peu éloignée de $0^{\text{cal}},7$ (*voir* p. 4).

D'autre part, c_1 peut s'écrire

$$c_1 = m' - \frac{L}{u'-u}\frac{du'}{d\theta} = \frac{m'}{u'-u}\left(u' - u - \frac{L}{m'}\frac{du'}{d\theta}\right).$$

On a vu, au commencement de ce travail, que la parenthèse précédente est toujours du signe de m'; c_1 est donc essentiellement positif, et sa limite ne peut être que positive ou nulle. D'après le Tableau de la page 5, cette limite semblerait être peu différente de zéro, en tout cas distincte de la limite de c_0. Cette contradiction formelle avec la théorie tient évidemment à ce que les données qui entrent dans le calcul de c_0 et c_1 sont un peu incertaines près du point critique.

La régularité de la variation de c_0 et la précision avec laquelle on peut toujours mesurer m portent à penser que la loi de variation de c_0 est très voisine d'être exacte. La mesure moins précise de m', qui correspond à des poids de matière beaucoup plus faibles que m, concorde avec la valeur erronée de sa limite. Or l'inexactitude de m' doit se reporter sur la chaleur de vaporisation L que l'on en déduit en vertu de l'équation

$$(6) \qquad m' = m + \theta\frac{d}{d\theta}\frac{L}{\theta}.$$

La comparaison des valeurs de L trouvées ainsi et par la formule de Clapeyron pourra nous renseigner sur L d'abord, puis sur m'. La difficulté d'une telle comparaison aux températures peu éloignées de la température critique réside dans l'incertitude où l'on est d'une loi exacte de variation de p avec la température, les nombres trouvés par Sajotchewski paraissant un peu trop grands.

Dans ces conditions, j'ai préféré avoir recours à la formule (b) donnée

par M. J. Bertrand [1]

$$p_b = G\left(\frac{\theta - \lambda}{\theta}\right)^{100}$$

qui représente assez bien les expériences de Regnault en se rapprochant beaucoup de celles de Sajotchewski. Soit donc L_b la chaleur de vaporisation calculée par la formule de Clapeyron en se servant de p_b; on a

$$L_b = A\theta(u' - u)\frac{100\lambda}{(\theta - \lambda)\theta}p = Ap(u' - u)\frac{100\lambda}{\theta - \lambda} = r_1\frac{100\lambda}{\theta - \lambda},$$

r_1 étant la chaleur latente externe telle que je l'ai donnée dans un travail antérieur [2]; on comparera ainsi L_b à la somme $\rho + r_1 = \lambda_1$:

t.	ρ.	r_1.	$\rho + r_1 = \lambda_1$.	L_b.
°	cal	cal	cal	cal
153,6	12,72	2,37	15,09	16,08
143,45	26,80	4,19	30,99	29,18
132,3	38,76	5,96	44,72	42,72
116,35	45,83	7,36	53,19	54,70

A part la valeur de λ_1 relative à 153°,6, que l'on sait être un peu faible, on voit que dans un intervalle de 30° ou 35° au-dessous de la température critique, l'expérience a donné des valeurs légèrement par excès de la chaleur de vaporisation, tandis qu'au delà les valeurs de λ_1 sont par défaut [3]. Cela prouve qu'au voisinage de la température critique $\frac{dL}{d\theta}$ est trop grand en valeur absolue; par conséquent, en vertu de l'équation (6), m' est aussi trop grand en valeur absolue. Dès lors, on comprend très bien pourquoi, dans mes expériences, le rapport $\frac{m'}{m}$, au lieu de tendre vers -1 à la température critique, paraît tendre vers une limite plus grande en valeur absolue.

De plus, si m' est nettement trop petit algébriquement, on voit pourquoi c_1 a des valeurs trop faibles au voisinage immédiat du point critique.

---

(1) J. BERTRAND, *Thermodynamique*, p. 176.

(2) E. MATHIAS, *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse pour* 1896, p. 43. — Par suite d'une erreur de virgule, la valeur de r_1 pour 153°,6 est $2^{cal},37$ et non $0^{cal},24$, comme cela est indiqué sur le Mémoire cité.

(3) Aux températures voisines de 65°, L_b donne, comme je m'en suis assuré directement, des valeurs supérieures de plusieurs unités à celles que donnent les nombres de Regnault introduits dans la formule de Clapeyron; il est donc illusoire de vouloir comparer λ_1 et L_b aux basses températures.

Sous le bénéfice de ces remarques, on peut dire qu'il n'y a pas contradiction entre la théorie et l'expérience.

3. *Propriétés des courbes de titre constant.* — Les courbes $c_1 = f(\theta)$, $c_0 = \varphi(\theta)$ sont des courbes de titre constant, ceux-ci ayant pour valeurs 1 et 0. Quelle serait la forme de la courbe correspondant au titre constant x, c'est-à-dire de la courbe $c_x = \psi(\theta)$?

L'équation (2) montre que cette courbe est tout entière comprise entre celles des titres 0 et 1. Si l'on dérive par rapport à θ les deux membres de cette équation, il vient

$$\frac{dc_x}{d\theta} = x\frac{dc_1}{d\theta} + (1 - x)\frac{dc_0}{d\theta}.$$

D'où l'on voit immédiatement que, *pour une valeur fixe de* θ, *les tangentes à toutes les courbes de titre constant sont concourantes.*

Étant données les deux courbes $c_1 = f(\theta)$ et $c_0 = \varphi(\theta)$, on construira donc aisément celle qui correspond à un titre constant donné.

A la température critique, la construction de la tangente indiquée ci-dessus devient illusoire, car $\frac{dc_x}{d\theta}$ a une valeur moyenne entre $\frac{dc_0}{d\theta}$ dont la limite est $+\infty$ et $\frac{dc_1}{d\theta}$ dont la limite est $-\infty$. Or il ne peut y avoir qu'*une seule* valeur de x pour laquelle la limite de $\frac{dc_x}{d\theta}$ soit finie (¹); pour les valeurs de x plus grandes que celle-là, la limite de $\frac{dc_x}{d\theta}$ sera $+\infty$; pour les valeurs de x plus petites, la limite sera $-\infty$.

Ainsi toutes les courbes de titre constant ont, à la température critique, la même tangente commune parallèle à l'axe des ordonnées, *sauf une* qui rencontre cette tangente sous un angle fini. Par analogie avec ce qui se passe pour la courbe de saturation dans le plan des pv, il est permis de supposer que c'est la courbe de titre 0,5, pour laquelle

$$c_{0,5} = \frac{c_0 + c_1}{2},$$

qui, à la température critique, rencontre toutes les autres sous un angle

---

(¹) Il n'est pas démontré mathématiquement que cette valeur de x existe; cependant je l'admettrai.

fini. Les équations (3) donnent, par addition,

$$c_0 + c_1 = m + m' - l\frac{d(u+u')}{d\theta} = (m+m') - l\frac{dp}{d\theta}\,\frac{d(u+u')}{dp}.$$

Or l'expérience montre que la limite $\frac{d(u+u')}{dp}$ est finie; d'autre part, $\frac{dp}{d\theta}$ est toujours fini; la limite de $c_1 + c_0$ étant $2a$, il s'ensuit que la limite de $m + m'$ est également finie.

Soit un mélange de liquide et de vapeur de poids 1 et de titre x que l'on échauffe en maintenant la saturation; sa chaleur spécifique à titre constant μ_x est de la forme

$$\mu_x = x m' + (1 - x) m.$$

Pour le titre constant x, la variation de μ_x en fonction de θ donne une courbe comprise entre celle de $m = F(\theta)$ et celle de $m' = \Phi(\theta)$ (¹). *Les tangentes à toutes les courbes* $\mu_x = \Psi(\theta)$, *pour une même valeur de* θ, *sont concourantes,* car on a

$$\frac{d\mu_x}{d\theta} = x\frac{dm'}{d\theta} + (1-x)\frac{dm}{d\theta}.$$

La limite de $\frac{dm'}{d\theta}$ étant $-\infty$, celle de $\frac{dm}{d\theta}$ étant $+\infty$, la limite de $\frac{d\mu_x}{d\theta}$ sera $\pm\infty$ suivant les cas. On pourra donc répéter ici, mot pour mot, ce qui a été dit à la page précédente pour c_x, à savoir : il est extrêmement probable qu'il existe une valeur x du titre pour laquelle la courbe $\mu_x = \Psi(\theta)$ admet, à la température critique, une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées. Il faut, pour cela, que la valeur limite de μ_x soit finie, puisque les courbes de titre constant ne peuvent couper les courbes extrêmes; comme la courbe de titre 0,5 a précisément une valeur limite finie $\frac{m+m'}{2}$, il s'ensuit que ce ne peut être qu'elle qui admette, à 156°, une tangente oblique à la direction de l'axe des ordonnées.

4. *Remarques sur les adiabatiques tracées dans le plan des pv à l'intérieur de la courbe de saturation.* — Reprenons le mélange de titre x et de poids 1; une transformation adiabatique infiniment petite sera donnée

(¹) *Voir* E. Mathias, *Sur l'étude calorimétrique complète des liquides saturés* (*Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse,* t. X, p. 41; 1896).

par l'équation

$$c_x \, d\theta + l \, dv = 0.$$

Le corps de transformation restant toujours saturé, p est fonction de θ, mais non de x. On a donc $d\theta = \frac{d\theta}{dp} dp$, et l'équation différentielle d'une adiabatique, dans le plan des pv, est donnée par

$$c_x \frac{d\theta}{dp} dp + l \, dv = 0.$$

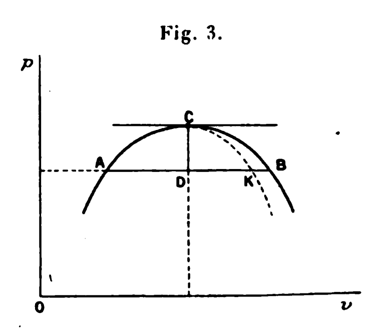
Son coefficient angulaire, au point (p, v), est donc

(6) $$\frac{dp}{dv} = - \frac{l \frac{dp}{d\theta}}{c_x}.$$

Comme l, $\frac{dp}{d\theta}$ et c_x sont essentiellement positifs, on voit que le coefficient angulaire est toujours négatif, la pression diminuant toujours quand le volume augmente.

Au point critique, l, $\frac{dp}{d\theta}$ et c_x sont finis; donc *l'adiabatique qui passe par le sommet de la courbe de saturation coupe celle-ci sous un angle fini.* Elle ne peut être tangente à la courbe de saturation, car la limite de

Fig. 3.



c_x est finie, et elle ne peut pas la couper orthogonalement, parce que la limite de c_x n'est pas nulle. On peut retrouver ces deux résultats à l'aide des considérations suivantes qui utilisent la méthode de réduction à l'absurde.

1° Soit la courbe de saturation dans le plan des pv; supposons que l'adiabatique CK passant par le sommet C soit tangente en ce point à la courbe.

de saturation; soit l'isotherme AB voisine du sommet C; si l'on considère $AB = u' - u$ comme étant un infiniment petit du premier ordre, $CD = dp$ est du second ordre, ainsi que $d\theta$ $\left(\text{puisque } \frac{dp}{d\theta} \text{ est fini}\right)$. KB est au moins du second ordre, donc l'aire curviligne CKB est au moins du quatrième ordre.

Appliquons le principe de l'équivalence au cycle CKB supposé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre; si l est la chaleur latente de dilatation ou chaleur fournie par unité de longueur tout le long de l'isotherme AB, on a, en remarquant que CK ne fournit rien et en négligeant le quatrième ordre devant le second,

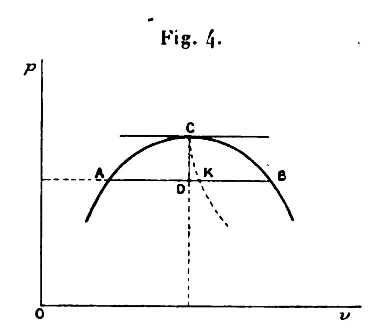
$$l\text{BK} + m'\,d\theta = 0.$$

Le produit lBK est du second ordre comme $d\theta$; il s'ensuivrait donc que m' est négatif, *mais a une limite finie* (1) à la température critique, ce qui est formellement contraire à mes expériences. L'adiabatique passant par le point C n'est donc pas tangente à la courbe de saturation, et la limite de c_x n'est pas infinie.

2° Supposons maintenant que la limite a de c_0, c_1, c_x soit nulle. Alors l'adiabatique CK est tangente à l'ordonnée CD.

L'équation (4) montre alors que $c_1 - c_0$ est de l'ordre de $(u' - u)$, c'est-

Fig. 4.



à-dire du premier ordre; donc, tout le long de l'isotherme AB, définie comme dans la *fig.* 4, c_x est du premier ordre.

Appliquons le principe de l'équivalence au cycle infiniment petit DCK,

(1) L'application du principe de l'équivalence au cycle ACK montre, au contraire, que la limite de m' est positive et *infinie;* ainsi, dans ce cas, l'une des limites serait finie et l'autre infinie, ce qui est une invraisemblance.

et supposons d'abord que CD soit une tangente *ordinaire* à l'adiabatique CK au point C. Comme CD est du second ordre, DK est du quatrième ordre; on a donc, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au quatrième, et en désignant par l la chaleur latente de dilatation le long de AB,

$$(7) \qquad c_x\, d\theta - l\,\mathrm{DK} = 0, \qquad c_x \frac{d\theta}{dp}\, dp = l\,\mathrm{DK}.$$

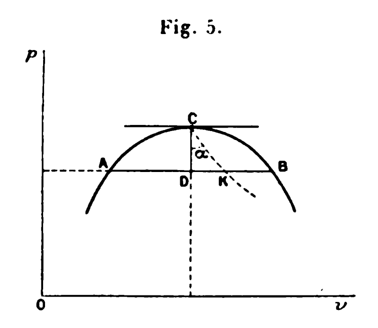
Cette équation est impossible, car le premier terme $c_x\, d\theta$ est du troisième ordre, tandis que le second est du quatrième.

Si l'on suppose que le contact de l'adiabatique CK et de l'ordonnée CD est d'ordre supérieur [1], l'impossibilité de l'équation (7) est plus grande encore, si l'on peut s'exprimer ainsi, car lDK est alors du sixième ordre et ne peut être égal à $c_x\, d\theta$ qui est du troisième ordre.

L'adiabatique passant par le sommet de la courbe de saturation ne la coupe donc pas orthogonalement, et la limite a ne peut être nulle.

L'adiabatique CK coupant obliquement la courbe de saturation, on retrouve géométriquement les résultats trouvés déjà par une autre voie. La

Fig. 5.



considération du triangle rectangle infiniment petit CDK redonne la relation (6). L'application du principe de l'équivalence aux cycles ACK, BCK (*fig.* 5) donne

$$m\, d\theta = l\,\mathrm{AK}, \qquad m'\, d\theta = -\, l\,\mathrm{KB}.$$

Comme AK et BK sont du premier ordre,

$$\lim m = +\infty, \qquad \lim m' = -\infty.$$

---

(1) Si l'on calcule le $\frac{d^2p}{dv^2}$ de l'adiabatique, on constate que cette expression n'est pas nulle au point critique.

On a, de plus,

$$\frac{m}{m'} = -\frac{\text{AK}}{\text{BK}}.$$

L'expérience montrant que le lieu des milieux des cordes AB est une droite passant par C, on en déduit

$$\lim \frac{\text{AK}}{\text{BK}} = 1;$$

d'où

$$\lim \frac{m}{m'} = -1.$$

C'est la théorie de M. Raveau (¹) un peu simplifiée et affranchie des objections qu'on pouvait lui faire.

Lors donc qu'on aura à chercher la limite, à la température critique, d'une expression dans laquelle interviennent les coefficients thermiques des fluides saturés, il pourra être très commode de considérer, avec M. Raveau, la *fig.* 5.

Cherchons, à titre d'exemple, la limite, à la température critique, de l'expression

$$u' - u - \frac{\text{L}}{m'}\frac{du'}{d\theta} = (u' - u)\left(1 - \frac{l}{m'}\frac{du'}{d\theta}\right).$$

La *fig.* 5 donne

$$m'\,d\theta = -l\,\text{KB};$$

d'où

$$\frac{l}{m'} = -\frac{d\theta}{\text{KB}}.$$

Or

$$\text{BD} = -du';$$

d'où

$$\frac{l}{m'}\frac{du'}{d\theta} = +\frac{\text{DB}}{\text{KB}}$$

et

$$1 - \frac{l}{m'}\frac{du'}{d\theta} = 1 - \frac{\text{DB}}{\text{KB}} = -\frac{\text{DK}}{\text{KB}},$$

$$u' - u - \frac{\text{L}}{m'}\frac{du'}{d\theta} = -\text{AB}\frac{\text{DK}}{\text{KB}} = -\text{AB}\frac{dp}{\text{KB}}\tan g\,\alpha.$$

L'expression considérée a donc pour limite 0, puisque AB et dp tendent séparément vers 0; de plus, elle est négative.

Le coefficient angulaire de la *fig.* 1 au voisinage du point critique est

(¹) C. Raveau, *Journal de Physique*, 3ᵉ série, t. I, p. 461; 1892.

donc

$$\frac{1}{d\theta} \mathrm{AB} \frac{dp}{\mathrm{KB}} \operatorname{tang} \alpha = \frac{dp}{d\theta} \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{KB}} \operatorname{tang} \alpha.$$

Ce coefficient angulaire est positif et tend vers une limite finie, puisque les trois facteurs qui le composent sont finis séparément. Il serait inutile de multiplier les exemples. Je signalerai seulement la commodité, quand on étudie l'intersection de la courbe de saturation avec une adiabatique intérieure, de la considération du cycle triangulaire infiniment petit formé d'un élément d'adiabatique, d'un élément d'isotherme horizontale et d'un élément de la courbe de saturation. On reconnaît aisément qu'une adiabatique intérieure peut être *tangente* à la branche de droite (vapeur saturée) de la courbe de saturation (aux points où $m' = 0$), tandis qu'elle peut être *normale* à la branche de gauche (côté du liquide saturé). Il en est ainsi aux points où *la quantité de chaleur fournie par unité de longueur le long de la courbe de saturation, projetée sur l'isotherme intérieure, est égale à la quantité de chaleur fournie par unité de longueur à l'isotherme.*

SUR LE PROBLÈME DE CAUCHY

POUR LES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE

A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Je me propose ici de comparer les diverses méthodes employées pour traiter le problème de Cauchy et de montrer qu'on ne doit pas les considérer comme distinctes, mais simplement comme des interprétations différentes d'un même système de formules. En particulier, nous verrons que l'intégrale à point singulier de M. Darboux s'introduit nécessairement dans la question, de sorte qu'en traitant le problème à la façon ordinaire on passe, en quelque sorte inconsciemment, par son intermédiaire.

I. Je commencerai par m'occuper d'une propriété relative aux enveloppes et, bien que cela ne soit pas nécessaire pour ce qui suivra, je la présenterai sous sa forme la plus générale et indépendamment de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Soit une surface fixe S à chaque point M de laquelle correspond dans l'espace une surface σ. Ces surfaces σ à deux paramètres peuvent avoir une enveloppe; désignons-la par Σ. Supposons, de plus, qu'à chaque point P de l'espace corresponde une courbe C sur S; il y correspondra par là même une surface Σ_P enveloppe de σ quand M décrit C.

Faisons alors décrire à P une courbe Γ; la courbe C se déplaçant sur S aura une enveloppe γ.

L'enveloppe de Σ_P, lorsque P *décrit* Γ, *se compose de la surface* Σ *et de la surface* Σ', *enveloppe de* σ, *quand* M *décrit* γ.

Cette propriété pourrait s'établir par des considérations de Géométrie infinitésimale, mais je m'attacherai uniquement au calcul et, pour simplifier le langage, je désignerai par A et par B ces deux problèmes qui conduisent à la même surface Σ'.

Désignons par x', y', z' les coordonnées de P et par ξ, η les coordonnées curvilignes d'un point M de S, la surface σ sera

$$(\sigma) \qquad V(x, y, z, \xi, \eta) = 0,$$

et la courbe C

$$(C) \qquad U(x', y', z', \xi, \eta) = 0.$$

Soit une courbe Γ

$$(\Gamma) \qquad x' = f(t), \qquad y' = \varphi(t), \qquad z' = \psi(t),$$

et désignons par

$$W(\xi, \eta, t) = 0,$$

ce que devient $U = 0$ quand on y remplace x', y', z' en fonction de t.

Cherchons d'abord à résoudre le problème B.

On obtiendra γ en éliminant t entre les deux équations

$$(\gamma) \qquad W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

Pour avoir l'enveloppe de σ quand ξ, η décrit γ, on peut considérer σ comme dépendant de deux paramètres ξ, η liés par l'équation de γ ou comme dépendant de trois paramètres ξ, η, t liés par les deux relations (γ). On aura donc Σ' en éliminant ξ, η, t entre les quatre équations

$$V = 0, \qquad W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad \frac{D\left(V, W, \frac{\partial W}{\partial t}\right)}{D(\xi, \eta, t)} = 0;$$

la dernière équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \frac{D(V, W)}{D(\xi, \eta)} = 0.$$

Or $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ n'est pas toujours nul sans quoi les trois paramètres seraient liés

par trois relations, de sorte qu'on obtiendra Σ' en éliminant ξ, η, t entre

$$\text{E} \qquad V = 0, \qquad W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad \frac{D(V, W)}{D(\xi, \eta)} = 0.$$

Cherchons maintenant à interpréter autrement les équations E. Pour abréger, nous poserons

$$\frac{D(V, W)}{D(\xi, \eta)} = \Delta, \qquad \frac{D(V, \Delta)}{D(\xi, \eta)} = \Delta', \qquad \frac{D(W, \Delta)}{D(\xi, \eta)} = \Delta''.$$

Pour éliminer ξ, η, t entre les équations

$$V = 0, \qquad W = 0, \qquad \Delta = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

supposons que de deux des trois premières, on tire ξ et η et qu'on porte dans les deux autres entre lesquelles il suffira alors d'éliminer t. Nous devons naturellement supposer, puisque $\Delta = 0$, que l'un des deux déterminants Δ' et Δ'' n'est pas nul. La surface résultant de l'élimination de ξ, η entre les trois premières est, d'après la théorie des enveloppes, l'enveloppe de σ quand ξ, η vérifient la relation

$$W = 0,$$

c'est-à-dire quand M décrit la courbe C relative au point P de la courbe Γ. C'est donc Σ_P.

Pour avoir l'enveloppe de Σ_P, nous pouvons prendre, par exemple, pour équation de cette surface l'équation $V = 0$ où ξ et η seraient les valeurs tirées de $W = 0$ et $\Delta = 0$.

Il faudra donc éliminer t entre

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

$\frac{\partial \xi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ étant donnés par

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial t} = 0;$$

finalement, il faudra donc éliminer ξ, η, t entre

$$V = 0, \qquad W = 0, \qquad \Delta = 0, \qquad \frac{D(V, W, \Delta)}{D(\xi, \eta, t)} = 0;$$

la dernière équation se réduit, en vertu des autres à

$$\Delta' \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Supposons qu'on parte alors des quatre équations

$$V = 0, \qquad W = 0, \qquad \Delta = 0, \qquad \Delta' = 0,$$

on aura, par hypothèse,

$$\Delta'' \neq 0,$$

de sorte que les deux équations

$$\Delta = \frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0,$$

$$\Delta' = \frac{\partial \Delta}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial \Delta}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0$$

ne pourront être vérifiées que si

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0,$$

ce qui conduit à l'enveloppe Σ.

Si, au contraire, nous partons du facteur $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$, nous retrouvons les quatre équations

E $$V = 0, \qquad W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad \frac{D(V, W)}{D(\xi, \eta)} = 0,$$

qui définissent Σ'.

Ainsi, les équations qui résolvent le problème B, résolvent en même temps le problème A débarrassé de la solution Σ connue *a priori*.

Pour simplifier le calcul, nous avons supposé que les coordonnées d'un point de Γ étaient exprimées en fonction d'un paramètre, mais il est évident que, même dans le cas où la courbe Γ serait donnée par deux relations entre x', y', z', la double interprétation des formules serait encore possible.

II. Considérons une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

et proposons-nous de chercher la surface intégrale passant par une courbe

Γ $$x' = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z' = \psi(t).$$

Pour cela appliquons la méthode rigoureuse qui est celle de Cauchy.

Nous devons commencer par intégrer les équations des caractéristiques; mais nous savons que si, pour le faire, on profite de leur forme particulière, on retombe sur la recherche d'une intégrale complète

$$V(x, y, z, a, b) = 0,$$

par la méthode de Lagrange et Charpit et que l'intégrale générale de ces équations est alors donnée par

$$(\alpha)\qquad V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + c\frac{\partial V}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Il nous faut introduire les valeurs initiales x', y', z', p', q' qui doivent vérifier

$$(\beta)\qquad \begin{cases} x' = f(t), \qquad y' = \varphi(t), \qquad z' = \psi(t), \\ F(x', y', z', p', q') = 0, \\ \dfrac{\partial z'}{\partial t} = p'\dfrac{\partial x'}{\partial t} + q'\dfrac{\partial y'}{\partial t}. \end{cases}$$

Pour l'intégrale considérée, les trois constantes initiales a, b, c seront fonctions de x', y', z', p', q' et, par suite, seront des fonctions de t que je désignerai par ξ, η, ζ. En plus, pour abréger, je poserai

$$V(x', y', z', \xi, \eta) = W(\xi, \eta, t).$$

Pour avoir ξ, η, ζ, je remplacerai d'abord x, y, z, p, q par leurs valeurs initiales dans les équations (α), ce qui donnera

$$(\alpha')\qquad W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \zeta\frac{\partial W}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x'} + p'\frac{\partial V}{\partial z'} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y'} + q'\frac{\partial V}{\partial z'} = 0.$$

Parmi les équations (β), l'avant-dernière est vérifiée quels que soient ξ, η, ζ; il ne reste à vérifier que

$$(\beta')\qquad \frac{\partial z'}{\partial t} = p'\frac{\partial x'}{\partial t} + q'\frac{\partial y'}{\partial t};$$

l'élimination de p' et q' entre (β') et les deux dernières équations (α') est évidente et donne

$$\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} = 0,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

ξ, η, ζ sont donc déterminées, comme fonctions de t, par

$$W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0.$$

Pour avoir l'équation de la surface intégrale, il faudra éliminer t entre

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, éliminer ξ, η, ζ, t entre les cinq équations que nous venons d'écrire. L'élimination de ζ est immédiate et l'on est finalement ramené à éliminer ξ, η, t entre

$$\text{E} \qquad V = 0, \qquad W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad \frac{D(V, W)}{D(\xi, \eta)} = 0.$$

III. On peut arriver plus rapidement, et d'une façon aussi rigoureuse, à ces équations en se servant *analytiquement* de l'intégrale complète. En effet, une intégrale s'obtient en considérant η comme fonction de ξ et éliminant ξ entre

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{d\xi}{d\eta} \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0.$$

Pour que l'intégrale obtenue contienne la courbe Γ, il faut et il suffit que cette fonction η de ξ soit telle que, quel que soit t, il y ait toujours une valeur de ξ vérifiant les deux équations

$$W(\xi, \eta, t) = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{d\xi} \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0;$$

ξ est une fonction de t et, en différentiant la première, il vient

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

qui, en vertu de la seconde, devient

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Les deux équations

$$W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

ne contenant pas $\frac{d\eta}{d\xi}$ définissent ξ et η comme fonctions de t et par suite η comme fonction de ξ. Réciproquement, si ξ et η vérifient ces deux équations, on a certainement

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial W}{\partial \eta} = 0;$$

on est donc ramené à éliminer ξ, η, $\frac{d\xi}{d\eta}$, t entre

$$V = 0, \qquad W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial W}{\partial \eta} = 0;$$

en éliminant tout de suite $\frac{d\eta}{d\xi}$ on retombe sur les équations E du paragraphe précédent.

IV. L'interprétation géométrique des formules auxquelles les deux méthodes précédentes viennent de nous conduire se fait immédiatement.

Considérons les deux paramètres ξ, η qui entrent dans l'intégrale complète

$$\sigma \qquad V(x, y, z, \xi, \eta) = 0,$$

comme les coordonnées curvilignes d'un point M d'une surface S. A chaque point M correspond une surface σ. A chaque point P (x', y', z') correspond sur S la courbe

$$C \qquad V(x', y', z', \xi, \eta) = 0$$

qui exprime que σ passe par P.

Les équations E peuvent être considérées comme celles d'un problème B. c'est-à-dire comme définissant l'enveloppe de la surface Σ quand M décrit l'enveloppe de C, c'est-à-dire la courbe γ définie par

$$W(\xi, \eta, t) = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Ces deux relations expriment que l'équation

$$W = 0,$$

où l'on considère t comme inconnue, a une racine double, c'est-à-dire que σ est tangente à Γ.

Les formules E peuvent donc s'interpréter comme définissant l'enveloppe des intégrales complètes tangentes à la courbe proposée et nous retrouvons ainsi la méthode géométrique généralement employée.

IV. Les formules E peuvent aussi être considérées comme celles d'un problème A. En assujettissant le point M à décrire la courbe C, on assujettit l'intégrale complète σ à passer par P, de sorte que la surface Σ_P du problème A est l'enveloppe des intégrales complètes qui passent par P; c'est donc l'intégrale à point singulier de M. Darboux relative au point P et il faut ensuite chercher l'enveloppe de cette intégrale quand P décrit Γ.

Nous retrouvons ainsi, par un simple changement d'interprétation des formules ordinaires la méthode élégante proposée par M. Darboux [1].

V. D'après ce que nous avons vu, à propos des problèmes A et B, les deux méthodes géométriques ne sont pas absolument équivalentes. Chacune a ses avantages et ses inconvénients.

La méthode par l'intégrale complète ordinaire, du moins en employant celle qui est tangente en un nombre limité de points à l'intégrale singulière, résout *rigoureusement* le problème sans introduire de solution auxiliaire, mais exige que l'on recommence chaque fois toutes les éliminations.

La méthode par l'intégrale à point singulier présente l'avantage de permettre de faire, une fois pour toutes, les éliminations qui fournissent l'équation de l'intégrale relative à un point quelconque x', y', z'. Chaque fois que l'on changera de courbe Γ, il y aura seulement à recommencer l'élimination d'une seule inconnue entre deux équations. Le calcul est donc plus simple; mais, s'il y a une solution singulière, on devra fatalement la trouver en facteur dans le résultat, et il faudra de nouveaux calculs pour l'en débarrasser.

Si donc il n'y a pas d'intégrale singulière et si l'on n'a à traiter le problème de Cauchy que pour une seule courbe Γ, les deux méthodes sont absolument équivalentes.

S'il n'y a pas d'intégrale singulière et si l'on a à traiter le problème de

(1) DARBOUX, *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

Cauchy successivement pour plusieurs courbes Γ, il y a avantage à employer le procédé de M. Darboux.

Nous pouvons donc dire que dans le cas où l'intégrale singulière de Lagrange n'existe pas, il y a avantage à employer systématiquement l'intégrale à point singulier de M. Darboux.

Si l'intégrale singulière existe, il est impossible de choisir d'une façon générale, car on est en présence de deux modes de calcul, l'un brutal et fournissant la solution simple, l'autre simple et élégant, mais fournissant la solution cherchée compliquée d'une solution auxiliaire.

Dans ce cas, il est facile de donner l'interprétation des courbes C. Prenons pour S l'intégrale singulière Σ. ξ, η pourront être considérées comme les coordonnées curvilignes du point M où σ touche Σ. La courbe C relative à un point P sera donc le lieu des points de contact des intégrales complètes passant par P avec l'intégrale singulière ou encore la courbe de contact de l'intégrale singulière avec l'intégrale à point singulier relative au point P. Quant à la courbe γ, enveloppe des courbes C, c'est le lieu des points de contact avec Σ des intégrales complètes tangentes à Γ.

A la façon dont nous avons présenté les calculs, il semble que, ayant à résoudre le problème de Cauchy, pour une courbe bien déterminée Γ, il soit nécessaire de chercher l'intégrale à point singulier uniquement pour les points de Γ. Cela tient seulement à la forme que nous avons donnée aux équations de Γ. Si Γ est donnée de la façon la plus générale

$$f(x', y', z') = 0, \qquad \varphi(x', y', z') = 0,$$

on sera forcé de chercher l'intégrale Σ_P relative à un point P absolument quelconque [1].

---

[1] Je ferai remarquer que tous les calculs relatifs au problème de Cauchy sont bien connus de tous ceux qui ont eu à s'occuper de cette question, mais que j'ai été obligé de les développer complètement ici, car ils ne figurent explicitement, à ma connaissance du moins, dans aucun des Traités ou Mémoires classiques.

SUR LES

COURBES DE DÉFORMATION TYPIQUES DES FILS NEUFS,

Par M. H. BOUASSE,

Professeur de Physique à l'Université de Toulouse.

PREMIÈRE PARTIE.

De la nature des problèmes à résoudre par l'étude de ces courbes de déformation. Considérations historiques et théoriques.

La théorie de l'élasticité se compose, comme on sait, de deux parties bien distinctes. Dans l'une, on détermine, quels que soient le milieu homogène ou hétérogène et la nature des déformations qu'il a subies, la manière dont sont nécessairement liées les forces qui agissent : 1° entre deux parties du solide à travers tous les éléments de surface qui limitent un élément de volume; 2° sur tous les éléments de surface qui passent par un point. Cette partie de la théorie de l'élasticité est au fond tout entière dans le théorème suivant dû à Cauchy : *Si en un même point d'un milieu solide* F *et* F′ *sont les forces exercées sur deux éléments plans* S *et* S′, *ayant les droites* D *et* D′ *pour normales, la projection de* F *sur* D′ *est égale à la projection de* F′ *sur* D, et dans l'existence de l'ellipsoïde d'élasticité.

L'autre partie cherche à relier les forces, qui ont été définies par la première, aux déformations du solide, sous certaines restrictions de petitesse pour ces déformations : elle définit l'ellipsoïde de dilatation et les relations qui existent entre lui et l'ellipsoïde d'élasticité. Elle a donné lieu à bien des controverses, et les limitations qu'on doit imposer aux déformations pour qu'elle soit applicable semblent rendre son emploi impossible dans toutes les questions analogues à celles qui sont traitées dans ce Mémoire, où les déformations sont énormes. Mais c'est une illusion : son utilité subsiste même dans ce cas, soit qu'on veuille, avec Saint-Venant, déduire de la grandeur des axes de l'ellipsoïde de dilatation la détermination des plus

grandes dilatations qu'un solide peut supporter et en conclure le maximum des efforts qu'il peut subir; soit, en se plaçant à un point de vue tout différent et considérant avec Coulomb le milieu comme formé de particules parfaitement élastiques noyées dans un ciment, qu'on veuille calculer les déformations des particules et non plus du solide total, en leur appliquant ces équations. Nous reviendrons plus loin là-dessus.

Cherchons ce que la théorie de l'élasticité nous apprend sur un cylindre à base circulaire dont la longueur est un grand nombre de fois le diamètre, tordu et tendu simultanément. Ce cas, très élémentaire, mais dont l'étude complètement faite trancherait des questions d'une importance capitale, a été comme négligé des ingénieurs qui préfèrent ce qui prête à de brillants développements mathématiques ou ce qui semble se rapprocher davantage de la pratique, comme s'il y avait un espoir quelconque de confirmer la valeur d'une hypothèse en étudiant les déformations d'un fer à T.

Nous n'espérons pas dire des choses bien neuves, mais tracer à l'usage des physiciens un programme d'expériences que nous chercherons nous-mêmes à remplir dans la seconde Partie de ce Mémoire.

Des forces aux divers points d'un cylindre circulaire tordu et tendu.

Dans tout ce qui suit, nous prenons comme axe des z l'axe du cylindre. Comme tout est symétrique autour de cet axe, nous plaçons le point considéré sur l'axe des x et posons $x = r$; le méridien passant en ce point est le plan zx et l'équateur ou section droite le plan xy. Nous rappelons que dans la notation des N et des T, T_1 désigne les forces normales à l'axe des x qui agissent sur les faces du prisme élémentaire, parallèles à cet axe; N_1 la force parallèle à l'axe des x qui agit sur la face normale à cet axe. Enfin les N sont prises avec le signe $+$, si ce sont des tractions; avec le signe $-$, si ce sont des pressions.

L'expérience donne, à chaque instant, la charge totale P et le couple total C; cela ne suffit évidemment pas pour déterminer en tous les points du cylindre les N et les T; mais on a fait de plus des hypothèses qui semblent légitimes.

On néglige d'abord la pression atmosphérique : de ce que le cylindre n'est plus pressé sur ses faces latérales résulte nécessairement la condition $N_1 = N_2 = 0$.

On admet que la charge P se répartit uniformément sur toute la section droite, d'où la relation $N_3 = P/\pi R^2$, où R est le rayon du cylindre.

Restent les forces tangentielles. Les forces T_2, si elles existaient, tendraient à transformer les sections droites qui sont planes en des calottes de révolution autour de l'axe du cylindre; les forces T_3, tout en laissant planes les sections droites, produiraient une courbure des droites tracées dans ces sections. En particulier, les diamètres se transformeraient, comme première approximation, en des courbes du troisième degré avec inflexion au centre.

Mais l'existence des forces T_2 est inconciliable dans un cylindre long et mince avec ce fait que, par raison de symétrie, les sections doivent rester planes, au moins à un petit nombre de diamètres des extrémités; l'existence des forces T_3 est inconciliable avec ce fait que, toujours à une petite distance des points d'attache, les forces tangentielles sur la surface même du cylindre sont nulles. On pose donc $T_2 = T_3 = 0$.

Il résulte de ces hypothèses que les divers cylindres creux concentriques dont on peut considérer l'emboîtement comme formant le cylindre plein, sont élastiquement indépendants et se déforment en même temps sans qu'il y ait tendance à se produire un glissement tangentiel de ces cylindres les uns par rapport aux autres. Les sections droites restent circulaires et planes; les droites qui y sont tracées restent droites et cela, non pas à cause des liaisons, mais par l'absence de forces tendant à les courber.

Tous les élasticiens sont d'accord pour considérer que cette distribution des forces s'établit à une distance des extrémités du cylindre qui n'est qu'un multiple peu élevé du diamètre, alors même que les forces appliquées à ces extrémités mêmes n'y satisfont aucunement. En effet, ce n'est généralement pas par des forces tangentielles de notation T_1 que les cylindres sont tordus (ce qui impliquerait que l'on collât invariablement une section droite du cylindre contre une pièce qui tournerait autour de l'axe du cylindre, ou plus généralement, que l'on appliquât des forces tangentielles convenables sur chaque élément des sections droites terminales), mais par des forces de notation T_3 appliquées sur les faces latérales (comme quand on prend le cylindre dans un étau). On admet généralement qu'à un ou deux diamètres des extrémités, la transformation des forces quelconques produisant un couple en forces de notation T_1 est complète.

Ce fait n'est pas particulier à la torsion. Quand le cylindre est tendu par des poids, ce ne sont généralement pas les forces N_3 qui agissent sur les

extrémités, mais les forces tangentielles T_2, puisque généralement l'extrémité du fil est pincée dans un étau. Ici encore, la réaction des diverses parties transforme ces forces tangentielles en forces normales.

Cette transformation n'est pas seulement qualitative, mais encore quantitative. Dans le cas de la traction, elle est telle que tous les cylindres élémentaires dont l'ensemble fait le cylindre total, s'allongent de la même quantité, et cela que la déformation soit élastique ou permanente. Dans le cas de la torsion, elle est telle que tous les cylindres creux élémentaires concentriques, dont l'ensemble fait le cylindre total, tournent du même angle. Il est très difficile de donner une preuve rigoureuse de ces propositions; faut-il encore que les faits expérimentaux ne leur soient point contradictoires.

Prenons de la cire molle, pétrissons-la entre les doigts pour qu'elle soit bien homogène, puis roulons-la dans du papier pour en faire un cylindre aussi régulier que possible : avec une fine aiguille à repriser, perçons ce cylindre d'un trou, qui n'a pas besoin d'être dans une section droite, et étirons-le en le prenant entre les doigts par les extrémités. On constate qu'on peut diminuer beaucoup son diamètre, sans cesser de voir la lumière à travers le trou, et encore la lumière ne disparaît pas à cause de la courbure du canal, mais bien à cause de son aplatissement.

L'expérience sur la torsion se fait d'une manière analogue. On a souvent cherché à mettre hors de doute les hypothèses précédentes, en tordant des cylindres de fer, de cuivre ou d'acier d'assez gros diamètres, dans lesquels on avait percé de petits trous perpendiculairement à l'axe : ces trous étaient traversés par des aiguilles qui restaient droites quelque grande que fût la torsion. Il était bon de refaire la démonstration avec tout le soin possible sur des corps mous.

Perçons un trou très fin dans une section droite d'un cylindre de cire molle de 2^{cm} de diamètre sur 8^{cm} de longueur, obtenu comme il a été dit plus haut. Tordons-le bien régulièrement en le prenant entre les doigts par les extrémités. L'expérience montre qu'on peut le tordre de près d'un tour sans cesser de voir la lumière à travers le petit trou; pendant la torsion, la section du trou s'écrase naturellement beaucoup. On peut alors détordre le cylindre : la lumière passe toujours et la section du trou redevient sensiblement circulaire. L'expérience réussit quand, après avoir tordu au point que la section du trou s'est complètement aplatie et qu'on ne voit plus le jour à travers le trou, on détord. On revoit le jour, ce qui prouve bien que ce n'est

pas la courbure du canal, mais son aplatissement, qui empêchait la lumière de passer.

La torsion s'effectue par l'application de forces tangentielles de notation T_3; aux extrémités du cylindre, une droite tracée dans une section droite ne reste plus droite; il suffit, pour le voir, de tracer sur la face terminale du cylindre de cire molle un diamètre et de tordre par l'intermédiaire d'un bout de tube de 2^{mm} à 3^{mm} de hauteur dans lequel vient s'ajuster le cylindre.

Sur les conseils de M. Brillouin, j'ai cherché à répéter l'expérience sur des cylindres de plomb. Il fallait les couler en ménageant de petits trous dans les sections droites. Le moule se compose de deux tubes de laiton concentriques entrant l'un dans l'autre à frottement dur. Par un trait de scie, le tube intérieur est coupé en deux suivant un plan diamétral; l'autre est percé de petits trous qui se trouvent tous dans un même plan diamétral et deux à deux sur des perpendiculaires à l'axe du cylindre. On passe dans ces trous des bouts de fil de fer de $0^{mm},2$ de diamètre qu'on tend fortement, et l'on entre, de part et d'autre du plan diamétral dessiné par ces fils, les deux morceaux du tube plus étroit. Le système est bouché à sa base par un disque de cuivre maintenant l'écartement des morceaux du tube coupé; il est tout entier, y compris les fils de fer, mouillé et talqué avant le montage. On coule du plomb, on laisse refroidir, on démoule; les fils de fer n'adhèrent pas. On recommence avec succès sur ces cylindres les expériences faites avec la cire molle. On peut laisser dans les trous les fils de fer pendant la torsion; on constate après la torsion qu'ils n'ont pas été tordus par la facilité qu'il y a à les enlever.

On avait commencé par ne prendre aucune précaution pour empêcher l'adhérence des fils de fer. On tordait, on sciait et on limait jusqu'à mettre à nu les fils dont on constatait la forme rectiligne. On pouvait objecter que la rigidité relativement grande des fils de fer vis-à-vis du plomb empêchait le fil de se déformer. L'expérience suivante, faite sur le conseil de M. Brillouin, montre qu'il n'en est rien.

On tend un fil non talqué parallèlement aux génératrices du moule, assez près de la surface du cylindre, et l'on coule le plomb; on tord. Le fil doit prendre la forme d'une hélice et, par conséquent, s'allonger beaucoup. Si sa rigidité était très grande vis-à-vis de celle du plomb, pour ne pas s'allonger il pénétrerait vers l'axe du cylindre en coupant le plomb. C'est ce qui se passe quand on tord un cylindre de cire molle parallèlement aux

génératrices duquel on a noyé un fil métallique fin. Pour le plomb, il en va tout autrement.

Là où le fil de fer adhère fortement au plomb, il s'allonge énormément; là où il adhère mal, il casse; de sorte qu'en le mettant à nu avec une râpe, on trouve des bouts de fil de fer très étirés, isolés les uns des autres. Donc l'expérience sur les droites tracées dans une section droite est concluante, alors même que le fil de fer adhère avec le plomb pendant la torsion.

Il n'est donc pas contraire à l'expérience de considérer les cylindres concentriques comme indépendants. Cependant il ne faudrait pas accorder à ces expériences une force probante qu'elles n'ont pas; elles prouvent simplement que les forces de notation T_1 sont supérieures aux forces de notations T_2 et T_3 à un point tel que, pendant la torsion, deux tranches droites consécutives du cylindre commencent à glisser l'une par rapport à l'autre alors que les déformations produites dans ces tranches par les forces de notations T_2 et T_3 sont encore parfaitement élastiques. Ces déformations parfaitement élastiques seraient d'ailleurs et en tous cas trop faibles pour qu'on pût démontrer directement, par la forme des diamètres, si elles existent ou non.

Relation des N *et des* T *avec les forces appliquées.*

Nous admettrons donc que seules les forces N_3 et T_1 subsistent, et nous les appellerons N et T pour simplifier. Nous pouvons poser $N = P/\pi R^2$.

Il n'est pas possible de déduire la valeur en chaque point de T de la connaissance du couple total, si l'on ne sait pas comment varie T en fonction de la distance à l'axe du cylindre, puisque la seule équation d'équilibre que l'on ait est

$$C = \int_0^R 2\pi r^2 T \, dr.$$

On est amené à considérer deux cas principaux :

1° T est constant. Nous appellerons $[C_1]$ et $[T]$ les valeurs particulières du couple total et de la force tangentielle dans ce cas.

$$[C_1] = \frac{2\pi R^3}{3}[T];$$

2° T peut être représenté par une expression de la forme $T = \mu\alpha r$, où μ

et α seront définis plus loin, et l'on a

$$C = \frac{\pi}{2} \mu \alpha R^4.$$

Ellipsoïde d'élasticité.

De la connaissance de N et de T se déduit immédiatement la forme et la position de l'ellipsoïde d'élasticité, puisque l'équation généralement du troisième degré que l'on rencontre, admet ici une racine nulle. Soient A, B, C les axes de l'ellipsoïde; il vient

$$A = \frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + T^2},$$

$$B = \frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + T^2},$$

$$C = 0.$$

L'axe C coïncide avec l'axe des x; les autres sont situés dans un plan parallèle à l'axe du cylindre et normal au plan méridien passant par le point considéré. Le grand axe A fait avec l'axe des z un angle ε tel que $\tan\varepsilon = \frac{T}{A}$. En particulier, si le cylindre n'est que tordu, $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$; si le cylindre n'est que tendu, $\varepsilon = 0$.

Des déformations purement élastiques.

Les équations de l'élasticité sont

$$N_1 = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

. . . .,

$$T_1 = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

. . . .

Si nous admettons que les sections droites restent planes et que les rayons restent droits, on a nécessairement

$$u = -\alpha z y - m x, \qquad v = \alpha z x - m y, \qquad w = n z;$$

α désigne l'angle de torsion par unité de longueur et admet L^{-1} comme dimensions.

D'où, pour un point de l'axe des x,

$$T_2 = T_3 = 0, \qquad N_1 = N_2 = 0, \qquad T = \mu\alpha r, \qquad N = P/\pi R^2,$$

plus deux équations qui donnent m et n en fonction de N,

$$m = \frac{\lambda}{3\mu(3\lambda + 2\mu)} N, \qquad n = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} N.$$

Enfin l'on a

$$C = \alpha\mu \frac{\pi}{2} R^4.$$

Si donc on se donne les constantes λ et μ et les actions extérieures C et P, le problème est complètement résolu.

Ellipsoïde de dilatation.

Posons

$$n_1 = 1 + \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On déduit immédiatement, par les formules générales, la forme et la position de l'ellipsoïde des dilatations, c'est-à-dire de la surface en laquelle se transforme, pendant les déformations, une sphère découpée dans le milieu primitif. Le calcul est ici simplifié par le fait que l'un des axes est sûrement dirigé suivant l'axe des x. Soient a, b, c les axes de l'ellipsoïde; on a, pour déterminer les axes qui sont dans le plan parallèle au plan des yz, l'équation

$$a^2 - a(n_2 + n_3) - t_1^2 + n_2 n_3 = 0;$$

d'où

$$a - 1 = \frac{n - m}{2} + \sqrt{\left(\frac{n + m}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2},$$

$$b - 1 = \frac{n - m}{2} - \sqrt{\left(\frac{n + m}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2},$$

$$c - 1 = - m.$$

Soit ε' l'angle du grand axe de l'ellipsoïde de dilatation avec l'axe des z. On a

$$\operatorname{tang}\varepsilon' = \frac{m+n}{\alpha r} \pm \frac{1}{\alpha r}\sqrt{(m+n)^2 + \alpha^2 r^2}.$$

Si l'on admet les formules ordinaires reliant les deux ellipsoïdes, il est facile de constater que leurs axes coïncident.

Nous avons besoin, pour les discussions qui vont suivre, d'exprimer le grand axe de l'ellipsoïde de dilatation en fonction des forces. Or nous avons

$$m+n = \frac{N}{2\mu}, \qquad n-m = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)}N;$$

d'où

$$\mu(a-1) = \mathcal{C} = \frac{\lambda+2\mu}{4(3\lambda+2\mu)}N + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N^2}{4} + T^2}.$$

Des efforts ou extensions limites.

D'après tout ce que nous savons sur les phénomènes de déformation des métaux, nous ne pouvons parler de ce que les élasticiens appelaient *efforts dangereux* ou *extensions dangereuses,* ni maintenir les distinctions qu'ils faisaient entre la rupture prochaine et la rupture éloignée. Lorsque Saint-Venant dit (*Comm. sur Navier,* n° 3, § 9) : « Ce n'est pas une rupture immédiate ou prochaine qu'il s'agit de prévenir en réglant les dimensions des solides à employer dans les constructions, c'est leur rupture éloignée », il pose une inégalité $p < q$ entre deux quantités p et q, en laissant la différence $q - p$ suffisante pour que la pièce ne se brise pas quels que soient les cycles de température, de pression, de tension, etc. qu'elle puisse supporter dans le cours des temps. Ce sont là des considérations fort utiles aux ingénieurs, qui ne signifient rien du tout pour les physiciens.

Nous appellerons *efforts* ou *extensions limites* les efforts ou les extensions les plus grandes que puisse supporter un élément de surface ou de volume *dans des conditions données,* sans rien préjuger d'ailleurs sur l'obtention expérimentale de tels efforts ou de telles extensions. Ceci posé, quand nous parlerons des hypothèses de Coulomb ou de Lamé, il s'agira de leurs hypothèses appliquées non plus à la rupture des corps, mais aux limites que nous venons de définir.

Les fils des métaux doux (fer, platine, or, argent, etc.), sur lesquels nous opérons, ne se rompent que parce que leur matière n'a pas partout les mêmes propriétés ou que leur forme n'est pas parfaite. Le problème de la rupture ne peut donc être abordé qu'une fois les courbes de déformation expérimentalement déterminées, comme conséquence de la non-homogénéité des fils et du principe incontestable qu'une déformation amène la rupture quand elle diminue la résistance des points de moindre résistance : ce qui revient à distinguer des portions stables et des portions instables dans les courbes de déformation.

Hypothèse de Coulomb.

Rappelons tout d'abord la définition des pressions à l'intérieur d'un solide. Considérons le milieu séparé en deux parties 1 et 2 par une surface quelconque que nous supposons décomposée en éléments d'aire dS. On admet qu'il est possible de supprimer la partie 2 du milieu et de maintenir la partie 1 dans son état primitif, en appliquant à tous les éléments d'aire dS des forces dirigées d'une manière convenable et dont la grandeur est proportionnelle à l'aire de chaque élément et indépendante de sa forme. Coulomb donnait des pressions, à peu de chose près, la même définition.

Appelons N la composante normale de la pression, T la résultante des composantes tangentielles; voici, traduites en langage moderne et convenablement généralisées, les hypothèses de Coulomb (*Mém. des Sav. étr.*; 1773) :

L'élément de surface résiste à une traction limite [N] fonction de la composante tangentielle actuelle T et de divers paramètres tels que la température, etc., que nous aurons à énumérer.

L'élément de surface résiste à une force tangentielle limite [T] qui est fonction de la composante normale actuelle N, croît quand N croît, si N est une pression, décroît quand N croît, si N est une traction, suivant des lois à déterminer; elle est, de plus, fonction de divers paramètres. Les mouvements donnant lieu aux déformations permanentes à l'intérieur de la masse se font au contact des plans pour lesquels on a dépassé l'une ou l'autre de ces limites. Ils peuvent être d'ailleurs arrêtés par d'autres forces dont ils sont eux-mêmes la cause.

Cette hypothèse très simple se prête à de commodes généralisations; elle indique immédiatement comment se feront les déformations permanentes; elle permet d'imaginer que la vitesse, suivant laquelle se font les déforma-

tions, peut influer sur les limites [N] et [T]. Implicitement, elle suppose que la matière n'est pas homogène et Coulomb, dès le début de son Mémoire, distingue avec soin l'élasticité de la cohésion, c'est-à-dire les propriétés élastiques des particules et les liaisons entre ces particules (*voir* BRILLOUIN, *Ann. de Chim. et de Phys.*; 1898 et notre Mémoire, *Ann. de Chim. et de Phys.*; 1897).

Coulomb applique sa théorie à la résistance à l'écrasement des piliers de maçonnerie; voici son exemple traduit en langage moderne : le pilier est un parallélépipède droit, posé sur un plan horizontal, et qui supporte un poids produisant, par unité de surface de tout plan horizontal, une pression A. Les pressions, appliquées sur tout plan vertical à l'intérieur du solide, sont nulles. L'ellipsoïde d'élasticité se réduit à son grand axe vertical de longueur A. Traçons, à l'intérieur du pilier, un plan dont la normale fasse avec la verticale un angle α. D'après le théorème général que nous rappelions au début de ce travail, la pression totale oblique sur le plan considéré est verticale et égale à $A\cos\alpha$. Elle se décompose en deux :

L'une normale au plan $N = A\cos^2\alpha$;

L'autre tangentielle et dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan $T = A\cos\alpha\sin\alpha$.

Coulomb admet que la composante tangentielle limite [T] se compose de deux parties : la première constante $[T_1]$, l'autre qu'il assimile à un frottement et considère comme proportionnelle à la composante normale. Il a donc l'équation

$$[T] = [T_1] + KN,$$

à laquelle il faut joindre l'équation de condition

$$T < [T];$$

d'où enfin

$$A\cos\alpha\sin\alpha - KA\cos^2\alpha < [T_1].$$

Le premier membre est maximum pour l'inclinaison α donnée par l'équation

$$\operatorname{tang}\alpha = K \pm \sqrt{K^2+1}.$$

Coulomb applique ce calcul au cas d'une colonne de brique pour laquelle il prend $K = \frac{3}{4}$; il vient

$$\alpha = 63°26', \qquad A < 4[T_1].$$

Enfin, ajoutant à ses hypothèses la condition $[T_1] = [N]$, qu'il croit

avoir démontrée par l'expérience, il conclut que la normale du plan suivant lequel tendent à se produire les glissements, fait avec la verticale un angle de 63°26' et que « la force qu'il faudrait pour rompre une colonne de brique par une force pressante serait quadruple de celle qu'il faudrait pour rompre cette même colonne par une force de traction ».

Dans son *Commentaire sur Navier* (note du § 3), Saint-Venant cite très incomplètement Coulomb; de l'hypothèse il néglige cette partie qui fait dépendre la limite [T] de la pression normale N. La condition se réduit alors à

$$A \cos\alpha \sin\alpha < [T_1];$$

d'où

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{et} \quad A < 2[T_1];$$

de plus, admettant que $[T_1] = 0,8[N_1]$, il conclut que, d'après l'hypothèse de Coulomb, la force qu'il faudrait pour rompre une colonne par pression serait 1,6 de celle qu'il faudrait pour la rompre par traction. D'où cette conséquence que la théorie de Coulomb est erronée : c'est aller un peu vite en besogne.

Évidemment, certains détails de l'hypothèse de Coulomb peuvent être modifiés; rien n'impose que la variation de la force tangentielle limite s'exprime linéairement en fonction de la pression normale, c'est-à-dire par l'équation $[T] = [T_1] + KN$, ni surtout que le coefficient K soit égal au coefficient de frottement de deux morceaux de la même matière séparés l'un de l'autre. En admettant même que la forme linéaire soit aussi valable, lorsque N est une tension, $[T] = [T_1] - K'N$, rien n'indique que l'on ait $K = K'$.

Mais ce que nous tenons à mettre en évidence dans l'hypothèse de Coulomb, c'est qu'il suffit de connaître les forces qui agissent sur un élément plan pris à l'intérieur du solide, pour savoir si un glissement tangentiel ou une cession normale doit se produire sur cet élément plan. A supposer admissible l'hypothèse de Coulomb, la détermination du couple $[C_1]$ limite, auquel résiste un fil suffisamment tordu pour lequel on peut poser, au moins comme première approximation, $[C_1] = \frac{2\pi R^3}{3}[T]$, la torsion, s'effectuant à des vitesses v déterminées et sous des charges connues N, permettrait de trouver les relations qui restent encore indéterminées entre [T], N et v.

Dès qu'on eut découvert l'existence des ellipsoïdes d'élasticité et de dilatation, on voulut tout y rapporter; la distinction entre la cohésion et l'élas-

ticité fut oubliée; la matière redevint homogène et deux groupes d'hypothèses nouvelles se firent jour; ce qu'elles sont et ce qu'elles valent, c'est maintenant le lieu de l'examiner.

Hypothèses de Lamé et Clapeyron, de Saint-Venant.

Avant d'entrer dans le détail, il faut discuter le principe même de ces hypothèses. Les unes et les autres donnent comme critérium à la possibilité pour la matière de résister à un effort qui, par hypothèse, est appliqué à un plan, la longueur du grand axe de l'ellipsoïde d'élasticité ou de dilatation. Telles qu'elles sont généralement présentées, elles semblent tout à fait insoutenables. Les preuves expérimentales que l'on a produites pour leur confirmation ne peuvent suffire à des physiciens : ce sont d'ailleurs les mêmes expériences que l'on a fait servir à étayer les deux groupes d'hypothèses. Considérons donc la question comme entière et cherchons à asseoir notre opinion sur d'autres preuves que celles que l'on trouve dans les traités sur la résistance des matériaux. Aussi bien il y a, dans le *Commentaire sur Navier,* de quoi ruiner l'hypothèse de Saint-Venant, qui y est cependant développée en 500 pages.

Le premier grief général à adresser à ces hypothèses, c'est que, ne considérant que la longueur du grand axe de l'ellipsoïde d'élasticité ou de dilatation, elles admettent implicitement que la longueur des autres axes est indifférente. Ceci est contredit par les faits, de l'aveu même de Saint-Venant. On lit en effet dans le § XVI de la note du n° 113 :

« *Possibilité de dépasser beaucoup la limite de dilatation adoptée pour les cas ordinaires, lorsqu'il y a simultanément et dans un autre sens de fortes contractions....* Divers faits établissent que lorsqu'un solide est fortement comprimé en certains points et en certains sens, il peut éprouver, aux mêmes points et dans d'autres sens, des dilatations extrêmement considérables sans se rompre ni se désagréger aucunement, comme si les compressions comblaient les vides des disjonctions produites par les dilatations. » Que si une compression dans une première direction permet d'augmenter la dilatation dans une autre, n'y a-t-il pas lieu de craindre qu'une dilatation dans la première direction ne force à diminuer la dilatation dans une autre, et n'est-ce pas la condamnation de l'hypothèse?

Il est vrai que les hypothèses peuvent se généraliser de manière à prendre comme criterium, non plus la longueur du grand axe, mais la valeur d'une

fonction symétrique de la grandeur des trois axes, par exemple des invariants ou de certaines fonctions des invariants; nous reviendrons sur ce point.

Le second grief général à adresser à ces hypothèses, c'est qu'à supposer qu'elles donnent le moyen de reconnaître si oui ou non la matière résistera, elles ne permettent pas de dire comment se feront les déformations permanentes, au cas où la matière ne peut résister. Saint-Venant répond à cette objection avec une curieuse désinvolture. On lit, page 287 de son grand Mémoire *Sur la torsion des prismes* (*Sav. étr.;* 1856) : « *Manières diverses dont s'opèrent les ruptures....* La théorie précédente a pour but de prévoir le commencement de la rupture et d'en écarter les chances même éloignées; on ne peut rien inférer contre son exactitude, de ce qu'elle n'en calcule pas les circonstances et les phases, ce qui serait aussi difficile qu'inutile à son objet. »

L'aveu, pour dépouillé d'artifice qu'il soit, n'est pas fait pour nous contenter : il est indifférent aux physiciens que la rupture se fasse, pourvu qu'ils en connaissent l'histoire. Corrélativement, les élasticiens parlent de points dangereux, c'est-à-dire de points où la rupture est le plus imminente, et jamais de surfaces dangereuses, c'est-à-dire de surfaces suivant lesquelles doivent se produire les déformations permanentes.

Le troisième grief général est que ces hypothèses, d'après leur nature même, ne permettent pas de tenir compte de la variation des efforts limites avec la vitesse suivant laquelle se produisent les déformations permanentes. Or, il ne s'agit pas là de différences médiocres et difficiles à mettre en évidence; on peut faire varier le couple auquel résiste un fil de fer de plus de $\frac{1}{20}$ de sa valeur en modifiant la vitesse de torsion. Par quel procédé faire entrer cette vitesse dans des conditions tirées de la longueur des axes d'un ellipsoïde, qui dépend des forces appliquées non seulement sur les faces du parallélépipède le long desquelles se produisent les déformations permanentes, mais encore sur les faces le long desquelles ne se produit rien du tout.

Si forts que soient ces arguments, nous ne pouvons en rester là. Il s'agit maintenant d'entrer dans le détail, de voir ce que ces hypothèses donnent dans le cas du fil tendu et tordu et à quelles vérifications on peut soumettre leurs conséquences.

Hypothèse de Lamé et Clapeyron.

Dans leur Mémoire *Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes* (*Sav. étr.*, IV), Lamé et Clapeyron admettent que pour savoir si

des efforts peuvent être supportés par un corps, il suffit de calculer en tout point l'ellipsoïde d'élasticité. La condition de possibilité pour ces efforts est que le grand axe de l'ellipsoïde ne dépasse pas une longueur donnée qui caractérise la matière, quelles que soient d'ailleurs les longueurs des deux autres axes. Dans le cas particulier qui nous occupe, il résulte de cette hypothèse les conséquences suivantes. Soit [A] la valeur limite du grand axe de l'ellipsoïde d'élasticité; soit [T] l'effort tangentiel limite sous la traction normale + N; la condition est exprimée par l'équation

$$[A] = \frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + [T]^2}$$

ou

$$[T]^2 = [A]\big[[A] - N\big].$$

[T] est donnée en fonction de N par une parabole. La courbe est représentée en (1).

Supposons maintenant un cylindre tordu à un point tel que nous puissions considérer, au moins comme première approximation, tous les éléments d'une section droite comme résistant avec la même force tangentielle; le couple total est donné par la formule

$$[T] = \frac{3[C_1]}{2\pi R^3};$$

nous avons d'ailleurs généralement

$$N = \frac{P}{\pi R^2}.$$

D'après l'hypothèse que nous discutons, la limite [T], sans tension simultanée, est [A]; la limite [N], sans torsion simultanée, est aussi [A]; on a donc, entre le couple total limite $[C_1]$ sans tension simultanée et la charge totale limite [P] sans torsion simultanée, la relation

$$[P] = [C_1]\frac{1,5}{R}.$$

C'est là un résultat que l'expérience peut essayer de vérifier; en voici un autre plus important. On a, pour N = 0,

$$\frac{d[T]}{dN} = -\tfrac{1}{2}.$$

Dès le début, pour les moindres tensions, le couple limite varie beaucoup

avec la tension. Des autres hypothèses, nous tirerons des conséquences analogues qui leur serviront de pierre de touche.

L'hypothèse de Lamé et Clapeyron est muette dans le cas des pressions (il faut, dans les formules, prendre N négativement). C'est une opinion émise depuis longtemps et presque incontestable qu'une pression uniforme exercée sur un corps ne le désagrège pas, mais lui donne plus de cohésion et le rend moins déformable. Si donc on se borne à considérer le grand axe de l'ellipsoïde et non ses relations avec les autres, une compression exercée suivant une direction unique, comme dans l'exemple auquel Coulomb a appliqué sa théorie, équivaut à une compression uniforme et, par conséquent, ne peut en aucun cas désagréger le corps, ce qui est contraire à l'expérience.

D'ailleurs, Lamé et Clapeyron se rendaient bien compte de ce que leur hypothèse a de trop particulier. Ainsi ils disent (*loc. cit.*, p. 523) : « Il est possible que la plus grande traction à laquelle on puisse soumettre une tige, dans le sens de la longueur, sans altération permanente, varie avec les pressions latérales auxquelles la tige pourrait être exposée. »

En ce lieu de leur Mémoire, ils étudient les déformations d'un cylindre circulaire creux indéfini, inégalement pressé sur ses faces intérieure et extérieure. Il ne serait pas difficile de développer leur analyse en ajoutant une traction longitudinale, et le cas se prêterait très bien à des expériences précises. Il s'agirait de produire, à l'intérieur d'une telle tige, des pressions de plusieurs centaines d'atmosphères sous des charges variées. Aujourd'hui que la production des hautes pressions se fait aisément et que l'industrie livre couramment des tubes étirés, peut-être de telles expériences donneraient-elles des résultats intéressants.

On peut généraliser l'hypothèse de Lamé et Clapeyron sans abandonner leur point de vue, en faisant porter les conditions non plus sur la longueur du grand axe seul, mais sur une fonction symétrique des longueurs des axes. Si cette fonction était rationnelle, elle s'exprimerait rationnellement en fonction des coefficients

$$I_1 = N_1 + N_2 + N_3,$$
$$I_2^2 = N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2,$$
$$I_3^3 = N_1N_2N_3 + 2T_1T_2T_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2$$

de l'équation donnant les axes. Pour éviter toute particularisation sur cette

fonction, nous généraliserons l'hypothèse de Clapeyron en supposant tout de suite qu'il est possible d'exprimer la condition pour que la matière résiste à des forces données N, T, au moyen d'une ou plusieurs inégalités où entrent seulement I_1, I_2^2 et I_3^3.

L'hypothèse la plus simple consiste à prendre ces invariants eux-mêmes pour les fonctions cherchées et à leur imposer des limites numériques. Appliquées au cas qui nous occupe, ces conditions se réduiraient à limiter les deux quantités $A + B$ et AB.

Or $A + B = N$, $AB = -T^2$. Elles donneraient donc à N et à T une indépendance qu'ils n'ont pas. Mais nous pouvons imaginer bien d'autres fonctions des invariants.

Faisons porter, par exemple, l'une des limitations, à supposer qu'elles soient multiples, sur l'expression suivante :

$$I'^2 = 2I_1^2 - 6I_2^2 = (A-B)^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2,$$

qui devient, dans le cas du cylindre tendu et tordu,

$$I'^2 = 2N^2 + 6T^2.$$

La courbe qui relie les limites de la force tangentielle à la traction est une ellipse (courbe 2).

$$\frac{d[T]}{dN} = 0 \qquad \text{pour} \qquad N = 0.$$

D'ailleurs on a, entre le couple total limite $[C_1]$ sans torsion et la charge limite $[P]$ sans torsion, la relation

$$[P] = [C_1]\frac{2,6}{R}.$$

Nous aurions là une condition; il pourrait en exister d'autres. A supposer que cet ordre d'hypothèses ait un sens, ce qui est peu probable, le choix de ces nouvelles conditions est, pour l'instant, tout à fait impossible. D'ailleurs, quelles qu'elles puissent être, on se heurtera toujours à cette difficulté que l'on y passera, d'une manière continue, des pressions aux tractions, tandis qu'il est vraisemblable que les pressions et les tractions produisent des phénomènes très différents et qu'il doit être impossible de compenser une pression dans un sens par une traction dans un autre sens.

Hypothèse de Saint-Venant.

Dans son grand Mémoire *Sur la torsion des prismes* (*Sav. étr.*, XIV) et surtout dans son Commentaire sur la *Résistance des corps solides* de Navier, Saint-Venant développe l'hypothèse suivante : Il n'y a pas d'efforts dangereux; il y a des extensions dangereuses. Pour savoir si un corps peut résister à des déformations, il faut calculer la plus grande dilatation produite par ces déformations. Or, si l'on néglige les translations et les rotations, une sphère découpée dans le solide se transforme en un ellipsoïde que l'on appelle *ellipsoïde des dilatations*. Il suffit donc de calculer le grand axe de cet ellipsoïde (*voir* p. 8) pour savoir dans quelle direction se produit la plus grande dilatation et quelle est sa valeur. Si elle dépasse *une longueur déterminée une fois pour toutes et caractéristique de la matière*, le corps ne peut résister à la déformation.

Montrons des applications de cette hypothèse. Soit un cylindre uniformément pressé ou tiré dans la direction de l'axe des z et libre suivant ses faces latérales. On a $N_1 = N_2 = 0$ et en appelant i_1, i_2, i_3 les allongements parallèles aux trois axes,

$$i_1 = i_2, \qquad 2 i_1(\lambda + \mu) + \lambda i_3 = 0,$$

$$N_3 = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} i_3 = -\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda} 2 i_1.$$

Soit maintenant $[i]$ l'allongement limite.

Premier cas : *Traction*. — Le grand axe de l'ellipsoïde de dilatation est vertical; la tension maxima que peut supporter le solide par unité de surface est

$$[N_3] = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} [i] = \tfrac{10}{4} \mu [i],$$

si l'on pose avec Saint-Venant $\lambda = \mu$.

Second cas : *Pression*. — Le grand axe de l'ellipsoïde est l'un quelconque des rayons de sa section horizontale. On a alors

$$[N_3] = -\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda} 2[i] = 10 \mu [i],$$

si l'on fait $\lambda = \mu$.

D'où la conclusion (*Commentaire*, § VII de la note du n° 3) : « Un prisme

courra le danger de se rompre par compression longitudinale, lorsque sa contraction longitudinale sera arrivée au quadruple de la dilatation reconnue dangereuse ou sous laquelle il se romprait par extension.... On voit qu'un prisme d'égale contexture en tous sens et dont les faces latérales sont libres, rompra par compression longitudinale ou éprouvera un commencement de désagrégation qui amène la séparation et l'écrasement, sous une charge quatre fois plus grande que celle qui le romprait par extension ». On remarquera que ce nombre quatre est précisément celui de Coulomb. D'ailleurs, Saint-Venant ne fait aucune difficulté pour reconnaître que les vérifications expérimentales laissent à désirer.

Tandis que, dans la théorie de Coulomb, le sectionnement de la matière par rupture doit se faire suivant des plans plus ou moins inclinés sur la verticale, dans la théorie de Saint-Venant, le sectionnement doit se faire suivant des plans verticaux.

Quoi qu'il en soit, revenons au cas particulier qui nous occupe. Le grand axe de l'ellipsoïde de dilatation a est donné par la formule

$$\mu(a-1) = \mathcal{E} = \frac{\lambda + 2\mu}{4(3\lambda + 2\mu)} N + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N^2}{4} + T^2}.$$

Il n'est pas possible de comparer la théorie et l'expérience sans faire une hypothèse sur le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$; dans ce qui suit, $[\mathcal{E}]$ représentera le maximum de la quantité $\mu(a-1)$ compatible avec la matière choisie.

A. $\frac{\mu}{\lambda} = 0$:

$$[T]^2 = 4[\mathcal{E}]^2 - \tfrac{2}{3}[\mathcal{E}]N - \tfrac{2}{9}N^2 \qquad \text{(courbe 4)},$$

$$\frac{d[T]}{dN} = -\tfrac{1}{6} \qquad \text{pour} \qquad N = 0,$$

$$[T] = 0 \qquad \text{pour} \qquad N = 3[\mathcal{E}];$$

d'où

$$[N]_{T=0} = 1,5[T]_{N=0}.$$

B. $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{2}$: C'est l'hypothèse que fait Wertheim d'après le résultat de ses expériences.

$$[T]^2 = 4[\mathcal{E}]^2 - [\mathcal{E}]N - \tfrac{3}{16}N^2,$$

$$\frac{d[T]}{dN} = -\tfrac{1}{4} \qquad \text{pour} \qquad N = 0,$$

$$[T] = 0 \qquad \text{pour} \qquad N = 2,66[\mathcal{E}];$$

d'où

$$[N]_{T=0} = 1,33[T]_{N=0}.$$

C. $\frac{\mu}{\lambda} = 1$: C'est l'hypothèse que Saint-Venant fait toujours pour les corps isotropes qu'il appelle *à contexture égale en tous sens*.

$$[T]^2 = 4[\mathcal{E}]^2 - \tfrac{6}{5}[\mathcal{E}]N - \tfrac{4}{25}N^2 \qquad \text{(courbe 3)},$$

$$\frac{d[T]}{dN} = -\tfrac{3}{10} \qquad \text{pour} \qquad N = 0,$$

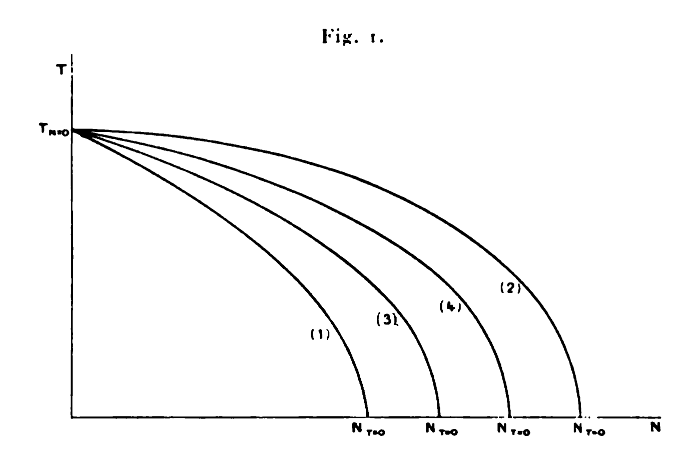
$$[T] = 0 \qquad \text{pour} \qquad N = 2,5[\mathcal{E}];$$

d'où

$$[N]_{T=0} = \tfrac{5}{4}[T]_{N=0}.$$

« C'est, dit Saint-Venant (*Comment.*, § IX du n° 152), la relation entre

Fig. 1.



les limites des efforts capables d'être indéfiniment supportés tangentiellement et perpendiculairement par une même face matérielle. »

D. $\frac{\mu}{\lambda} = \infty$:

$$[T]^2 = 4[\mathcal{E}]^2 - 2[\mathcal{E}]N,$$

$$\frac{d[T]}{dN} = -\tfrac{1}{2} \qquad \text{pour} \qquad N = 0,$$

$$[T] = 0 \qquad \text{pour} \qquad N = 2[\mathcal{E}];$$

d'où

$$[N]_{T=0} = [T]_{N=0}.$$

Nous retrouvons la courbe donnée par l'hypothèse de Lamé et Clapeyron (courbe 1).

Courbe typique des fils neufs. Théorie de J. Thomson.

Jusqu'ici nous avons toujours supposé que la limite [T] est unique et bien déterminée. Elle peut d'ailleurs être fonction de divers paramètres, de la température, de la tension, de la vitesse de torsion. Si le cylindre tordu et tendu était un tube infiniment mince, il résulterait de ce qui précède que sa courbe de torsion prise à partir du couple nul et prolongée jusqu'à des torsions considérables, se composerait de deux droites : l'une inclinée $C = \Gamma\alpha$, l'autre horizontale $C = [C_1]$. Mais le phénomène se trouve compliqué par ce fait que les divers cylindres qui forment le cylindre plein, n'arrivent pas à leur limite d'élasticité pour la même torsion. Le couple total, qui est la résultante des couples produits par les cylindres concentriques infiniment minces, ne varie donc plus suivant la loi qui vient d'être dite. J. Thomson a indiqué comment les choses devaient se passer dans l'hypothèse ici admise (*Camb. et Dub. Math. Journ.*, p. 252; 1848), cité par L. Kelvin (*Rep. of Papers*, t. III, p. 25).

Considérons un cylindre chauffé au rouge puis refroidi. Ses particules doivent être regardées comme complètement relâchées. Tordons-le jusqu'à ce que les éléments d'une section droite, situés près de la circonférence, subissent l'effort tangentiel limite [T]. Soit alors $[C_0]$ le couple total que supporte le cylindre et $[\alpha_0]$ la torsion correspondante par unité de longueur.

On a

$$[C_0] = \mu[\alpha_0]\frac{\pi}{2}R^4 = [T]\frac{\pi}{2}R^3,$$

puisque

$$[T] = \mu[\alpha_0]R.$$

Si l'on pousse plus loin la torsion, les éléments extérieurs d'une section droite vont glisser sur ceux qui appartiennent à la section droite immédiatement voisine, puisque nous savons que les sections droites ne se déforment pas et que l'accroissement de α sans glissement entraînerait un accroissement, par hypothèse impossible, de la force tangentielle. Les éléments des sections droites à des distances de plus en plus petites de l'axe vont atteindre successivement leur tension limite, et si, enfin, la torsion est suffisamment continuée, tous les éléments des sections droites seront soumis à l'effort tangentiel limite [T]. A ce moment, le couple $C = [C_1]$ sera

$$[C_1] = \frac{2\pi}{3}[T]R^3.$$

Le couple le plus grand que puisse supporter le cylindre total, dans l'hypothèse de l'invariabilité de l'effort limite [T], est donc $\frac{4}{3}$ du couple pour lequel la courbe cesse d'être une droite.

Il est facile de trouver entre les limites $[C_0]$ et $[C_1]$ la forme de la courbe de torsion.

Soit, à un moment donné, r le rayon de la circonférence pour laquelle les éléments de la section droite arrivent à subir l'effort tangentiel maximum; on a, pour définir l'angle de torsion, la relation $[T] = \mu\alpha r$. Le cylindre intérieur à cette circonférence, dont la déformation est encore purement élastique, donne un couple

$$C' = \mu\alpha\frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\pi}{2}\frac{[T]^4}{\mu^3\alpha^3}.$$

Le tube extérieur, où tous les éléments des sections droites subissent l'effort tangentiel maximum, donne un couple

$$C'' = \frac{2\pi}{3}[T](R^3 - r^3).$$

D'où, en tout, un couple

$$C = \frac{2\pi[T]}{3}R^3 - \frac{\pi}{6}\frac{[T]^4}{\mu^3\alpha^3}.$$

En introduisant le couple

$$[C_0] = \frac{2\pi}{3}[T]R^3,$$

on trouve facilement :

Au-dessous de la torsion $[\alpha_0]$, on a..... $C = [C_0]\dfrac{\alpha}{[\alpha_0]}$,

Au-dessus de la torsion $[\alpha_0]$, on a...... $C = \dfrac{4}{3}[C_0] - \dfrac{[C_0]}{3}\dfrac{[\alpha_0]^3}{\alpha^3}$.

On peut mettre ces équations sous une autre forme très générale. Posons

$$x = \frac{\alpha R}{[T]};$$

la droite par laquelle débute la courbe de torsion peut s'écrire

$$C = \mu\alpha\frac{\pi}{2}R^4 \quad \text{ou} \quad \frac{C}{[T]} = R^3\left(\frac{\pi}{2}\mu x\right),$$

elle vaut jusqu'à la valeur $x = \frac{1}{\mu}$.

Au delà de cet angle, la courbe peut s'écrire

$$\frac{C}{[T]} = R^3\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6\mu^3 x^3}\right).$$

Ces équations rentrent dans la forme générale $aC = R^3\varphi(aR\alpha)$, en posant $a[T] = 1$.

Lord Kelvin fait suivre la citation de J. Thomson d'une note dans laquelle il remarque que probablement la limite unique et déterminée [T] n'existe pas : « Un morceau de cuivre ou de fer pris dans un état non déjà modifié devient certainement plus dur par les déformations et un semblable résultat est probable pour les métaux ductiles. Donc les éléments extérieurs doivent supporter des tensions limites plus fortes que les éléments plus voisins de l'axe, jusqu'à ce que la torsion ait été poussée assez loin pour amener ces tensions à leur vraie valeur maxima dans toute la section. Mais il est probable qu'avant cela la matière extérieure sera devenue friable et fissurée ». Il n'y a évidemment qu'un seul moyen de juger ces objections, c'est de décrire expérimentalement la courbe de J. Thomson qui est la courbe typique des fils neufs.

Résumé et plan d'expériences.

En résumé, les théories les plus généralement admises veulent expliquer tous les phénomènes dans un fil tendu et tordu, au moyen des deux constantes λ et μ et d'une relation entre les limites [T] et [N] dont elles supposent l'existence, et les autres forces qui existent simultanément.

Elles sont amenées à considérer dans un fil tordu :

1° La constante de torsion d'un fil donné, soit le couple en ergs pour une torsion de 1 radiant d'un fil de 1^{cm} de longueur

$$\Gamma = \mu\frac{\pi}{2}R^4;$$

2° Un premier couple total limite $[C_0]$ à partir duquel le fil ne peut plus être considéré comme parfaitement élastique, ni la courbe de torsion comme rectiligne

$$[C_0] = \frac{\pi}{2}[T]R^3,$$

c'est la limite d'élasticité énoncée en couple;

3° L'angle de torsion correspondant à ce couple

$$[\alpha_0] = \frac{[C_0]}{\Gamma} = \frac{[T]}{\mu R};$$

c'est la limite d'élasticité énoncée en radiants.

4° Un second couple total limite $[C_1]$ que le fil ne peut dépasser

$$[C_1] = \frac{2\pi R^3}{3}[T];$$

5° L'angle correspondant, qui serait l'angle de détorsion du fil tordu à sa limite jusqu'au couple nul, en supposant qu'au moment de l'arrêt il ne se passe aucun phénomène et que la courbe de détorsion est rigoureusement rectiligne.

Elles donnent des formules, d'ailleurs contradictoires, pour calculer les variations de ces constantes lorsque le fil est à la fois tendu et tordu; ces formules font changer la valeur de $[T]$ sans changer la loi du phénomène.

Elles ne tiennent aucun compte de la vitesse avec laquelle se font les torsions, ni de plusieurs autres phénomènes, tels que l'allongement produit par la torsion même à tension constante, et réciproquement la torsion produite par l'allongement à couple constant.

Nous nous proposons, dans un prochain Mémoire, de comparer à l'expérience les conséquences de ces théories. Dans ce but, nous chercherons quelles relations existent entre les quatre quantités suivantes : la vitesse de torsion, la vitesse d'allongement, le couple total et la charge totale. Nous décrirons les courbes typiques de déformation des fils neufs, en nous limitant aux cas les plus simples [1].

Historique expérimental.

Ces problèmes d'élasticité ne sont si embrouillés encore à l'heure actuelle, que parce que les expérimentateurs ne s'astreignent pas suffisamment à définir ce qu'ils font. M. Brillouin dans son Mémoire *Sur la Plasticité* (*Ann. de l'École Normale*, 1890), pouvait dire fort justement que les Mémoires de mesure, prodigieusement nombreux, obscurcissent chacun à leur tour un sujet déjà peu clair. Pour des raisons que l'on comprendra immédiatement, ce n'est qu'en décrivant les courbes des fils neufs

---

(1) *Voir*, sur la définition de ces courbes, un Mémoire paru dans le t. XII de ces *Annales*.

à vitesse constante qu'on peut espérer résoudre le problème ici posé. Cela implique que *les fils ne serviront qu'une fois,* que *chaque fil décrira en tout et pour tout sa première courbe de déformation.* Quels que soient les résultats obtenus, il faudra bien se garder de vouloir qu'ils s'accordent avec ceux que peuvent donner d'autres méthodes. Et réciproquement, il serait absurde de s'efforcer de les prévoir par analogie avec ceux qui proviennent d'expériences faites sur des cycles fermés.

Ceci posé, on n'a jamais fait d'expériences systématiques sur l'existence ou la variation des couples limites avec la vitesse de torsion (supposée constante pendant toute une expérience et variant d'une expérience à l'autre); ni sur les allongements dus à la torsion (*voir* les généralités sur ce phénomène, § XXIV de notre Mémoire, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 1897); enfin, sur l'influence de la tension, puisque, par définition même du problème ici posé, nous devons éliminer tout ce qui a trait aux cycles fermés ou presque fermés [résultats de Wiedemann, 1858; de Lord Kelvin, 1865 (*Rep. of Pap.*, t. III, p. 25); de Tomlinson (*Phil. Trans.*, 1886); de Wiedemann (*Wied. Ann.*, 1879)], il ne reste à parler que du Mémoire de Braun publié dans les *Wied. Ann.*, t. CLIX; 1876.

Le Chapitre V de ce Mémoire est consacré à « la torsion et la tension dans les fils ». On trouve au § 5 les deux règles suivantes, que je transcris sans commentaire :

« Die Torsionsverschiebung, welche eine bestimmte Kraft hervorruft, ändert sich nicht, wenn der Draht einer Längsspannung unterworfen wird ». Et, plus loin, après l'exposé d'expériences, où d'ailleurs sont comparés des résultats fournis par une méthode directe et par une méthode d'oscillation : « Aus den Zahlen ergiebt sich übereinstimmend, dass der Widerstand des Drahtes gegen Torsion bei vergrösserter Spannung eher abnimmt als zunimmt ». Après ces citations, on ne s'étonnera pas que nous considérions la question comme entière.

LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

ET LA

THÉORIE DES GROUPES,

PAR M. F. MAROTTE,

Agrégé préparateur à l'École Normale supérieure.

INTRODUCTION.

Un des problèmes les plus importants que se propose l'Analyse moderne est l'intégration des équations différentielles. La solution en a été poursuivie dans bien des directions; je n'examinerai ici que celles où la théorie des groupes s'est montrée, jusqu'à présent, le plus féconde.

Une équation différentielle étant donnée, on s'est efforcé d'abord d'en exprimer l'intégrale par des fonctions connues ou des quadratures effectuées sur de telles fonctions. On put ainsi *intégrer* les équations différentielles linéaires à coefficients constants, les équations du premier ordre appartenant aux catégories suivantes : équations à variables séparées, équations homogènes, équations linéaires, équations de Jacobi, etc. Mais les méthodes d'intégration employées étaient spéciales à chaque type d'équations et n'avaient aucun lien commun, jusqu'à ce que M. Lie remarquât que toutes les équations ainsi intégrées restent invariables par les transformations d'un groupe continu; cette observation le conduisit à un procédé général d'intégration s'appliquant à toutes les équations étudiées par les anciens mathématiciens. D'une façon générale, la connaissance d'un groupe de transformations qui laisse invariable un système d'équations différentielles permet d'en simplifier l'intégration; M. Lie ([1]) se

([1]) Lie-Scheffers, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* et les Mémoires de M. Lie (*Mathematische Annalen*, t. XXIV et XXV. *Leipziger Berichte;* 1895).

posa donc le problème suivant : *Intégrer un système d'équations différentielles admettant un groupe connu.*

La notion de groupe conduit ainsi à un principe très général d'intégration. Mais il faut remarquer que les méthodes de M. Lie ne s'appliquent qu'à des systèmes particuliers d'équations différentielles; elles ne donnent aucun moyen de caractériser la difficulté du problème d'intégration pour un système quelconque. Le point de vue auquel s'est placé M. Lie rappelle celui de Lagrange et d'Abel dans l'étude des équations algébriques.

De plus, il n'y a qu'un très petit nombre d'équations différentielles dont l'intégrale s'exprime par des fonctions connues; il fallut donc modifier l'énoncé du problème d'intégration et l'on se proposa l'*étude analytique des fonctions vérifiant les équations différentielles.* Cauchy démontra l'existence des intégrales et en donna les développements en série autour d'un point non singulier; Briot et Bouquet, puis M. Fuchs commencèrent l'étude des singularités. La notion de *groupe discontinu* s'introduisit lorsqu'on voulut étudier les fonctions intégrales dans tout le plan. En ce qui concerne les équations différentielles linéaires pour lesquelles les résultats obtenus se présentent sous la forme la plus simple, nous avons l'énoncé suivant :

Lorsque la variable décrit dans le plan un contour fermé quelconque, les intégrales d'une équation linéaire subissent une substitution linéaire; les substitutions relatives aux divers contours que l'on peut tracer dans le plan forment un groupe discontinu que l'on appelle groupe de monodromie de l'équation.

Cette notion de groupe de monodromie est devenue la base de l'étude analytique des équations linéaires. MM. Jordan, Schwarz, Fuchs, Klein, Painlevé s'en sont servi pour rechercher les intégrales algébriques, M. Poincaré pour étudier les transcendantes qui intègrent les équations linéaires à coefficients algébriques.

Nous poursuivrons ici l'application de la théorie des groupes aux équations différentielles en nous plaçant à un troisième point de vue qui, comme nous le verrons, comprend les deux que nous venons d'indiquer. Il consiste en l'extension aux équations différentielles des idées introduites par Galois dans la théorie des équations algébriques.

M. Picard ouvrit la voie (*Comptes rendus;* 1883. *Annales de la Faculté de Toulouse;* 1887) en énonçant le théorème suivant :

A toute équation différentielle linéaire d'ordre n correspond un groupe algébrique de transformations linéaires à n variables, qui jouit de propriétés analogues à celles du groupe de Galois d'une équation algébrique.

Dans sa Thèse (*Annales de l'École Normale;* 1892), M. Vessiot démontra complètement la double propriété du groupe précédent, que nous nommerons *groupe de rationalité* de l'équation. Il fit voir quelle relation étroite existe entre le problème d'intégration et le groupe de rationalité.

M. Drach, enfin (*Comptes rendus;* 1893, 1895), étendit la théorie de Galois aux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Le travail suivant est divisé en deux Parties, où je résous deux questions distinctes, se rattachant néanmoins toutes deux au point de vue qui nous occupe maintenant.

La première Partie est consacrée à l'étude analytique des singularités des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels et à la classification des transcendantes qui les intègrent.

Au Chapitre I, je montre qu'à chaque point singulier a d'une telle équation est attaché un groupe de transformations linéaires qui joue, dans l'étude de la singularité, le même rôle que le groupe de Galois dans la résolution d'une équation algébrique, où le groupe de rationalité dans l'intégration d'une équation différentielle linéaire. Ce groupe, que nous appelons *groupe de méromorphie,* car ses invariants différentiels s'expriment par des fonctions de x méromorphes au point a, caractérise la nature du point singulier. Il y a, pour une équation d'ordre n, autant de classes de points singuliers qu'il y a de types de sous-groupes dans le groupe linéaire à n variables.

Au Chapitre II, j'établis les relations qui existent entre le groupe de rationalité, le groupe de monodromie et les groupes de méromorphie relatifs aux divers points singuliers d'une équation linéaire.

Au Chapitre III, j'élargis le champ d'application des méthodes de Galois, et je montre comment elles conduisent à la notion de groupe de monodromie. Le groupe de rationalité nous donne la position des intégrales par rapport à l'ensemble des fonctions rationnelles, tout comme le groupe de monodromie donne leur position par rapport à l'ensemble des fonctions uniformes. De la même façon, un autre groupe linéaire donnerait les relations des intégrales avec l'ensemble des fonctions réelles, et il est probable

que ce groupe jouera un rôle important dans l'étude des courbes définies par les équations différentielles linéaires. Les méthodes de Galois sont toujours applicables lorsqu'on veut étudier les propriétés des fonctions intégrales analogues à celles dont il est question ici : rationalité, méromorphie, uniformité, réalité, etc.

J'indique aussi, dans ce Chapitre, quelle est, à mon point de vue, la marche à suivre pour l'étude analytique des intégrales.

Le Chapitre IV contient une application des résultats précédents à la classification des transcendantes qui intègrent les équations linéaires à coefficients rationnels. Le dernier terme de la classification est constitué par les équations qui appartiennent à une même *espèce* de Riemann. J'établis quelques propriétés de ces équations, et j'expose une méthode qui permet de reconnaître si deux équations données sont ou non de même espèce.

La deuxième Partie est consacrée à la détermination du groupe de rationalité d'une équation différentielle à coefficients rationnels (ou algébriques).

Le Chapitre V contient l'exposition des généralités, ainsi que la marche à suivre pour la résolution du problème pour une équation d'ordre quelconque.

Je m'occupe ensuite aux Chapitres VI, VII et VIII des équations du deuxième, troisième et quatrième ordre. Grâce à une classification nouvelle des groupes linéaires homogènes, je montre que la détermination du groupe de rationalité est ramenée à la résolution du problème suivant :

Rechercher si une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique.

On sait toujours résoudre ce problème, et l'on arrive à cette conclusion :

On peut toujours déterminer le groupe de rationalité d'une équation linéaire d'ordre 2, 3 *ou* 4, *ou en ramener la détermination à l'étude d'une intégrale abélienne.*

Nous trouvons ainsi, et par la méthode la plus simple, *tous les cas possibles de réduction d'une équation linéaire du quatrième ordre.* Nous connaissons dans chaque cas les relations algébriques qui existent entre la variable indépendante et les éléments d'un système fondamental.

J'indique enfin comment on peut profiter de ces relations pour simplifier le problème d'intégration et le ramener à sa forme canonique.

La méthode suivie s'étend immédiatement aux équations d'ordre supérieur.

Au Chapitre IX, je ramène le problème de la détermination du groupe de monodromie attaché à un point singulier d'une équation linéaire, à la forme canonique suivante :

Rechercher si une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est méromorphe (intégrale normale).

Je montre comment les travaux de M. H. von Koch permettent d'étudier cette question.

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été présentés à l'Académie des Sciences (23 novembre 1896, 22 mars et 12 juillet 1897, 7 mars 1898). Dans une Note parue le 30 novembre 1896, j'ai montré comment les principes exposés dans la première Partie conduisaient aussi à une classification des singularités des équations aux dérivées partielles du premier ordre; les résultats obtenus seront exposés dans un Mémoire qui paraîtra prochainement.

Une bibliographie complète me paraissant très difficile à faire, je me suis borné à citer les Mémoires qui m'ont été utiles.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DES SINGULARITÉS ET CLASSIFICATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES HOMOGÈNES.

CHAPITRE I.

LES POINTS SINGULIERS D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE ET LEURS GROUPES DE MÉROMORPHIE.

---

1. *Équations linéaires du premier ordre.* — Nous allons montrer d'abord comment l'étude des singularités des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients rationnels nous a conduit à un principe général, permettant de classer les singularités de toutes ces équations.

En supposant que le point singulier étudié soit le point $x = 0$, l'équation peut s'écrire

$$\frac{y'}{y} = \mathrm{P}'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\alpha}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)},$$

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ étant un polynome en $\frac{1}{x}$ et $f(x)$ une fonction holomorphe et différente de zéro au point $x = 0$.

En intégrant, nous obtenons

$$y = e^{\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)} x^{\alpha} f(x),$$

et nous avons à distinguer trois cas.

A. Le polynome $\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ est nul (ou constant) et α est un nombre entier positif ou négatif. Dans ce cas

$$y = x^{\alpha} f(x)$$

et la fonction y est *méromorphe au point* $x = 0$.

Nous verrons plus loin qu'il y a avantage à considérer y comme l'invariant du groupe

$$(a) \qquad \mathrm{Y} = y,$$

formé de la seule transformation identique.

B. Le polynome $P\left(\frac{1}{x}\right)$ est nul (ou constant) et α est un nombre commensurable positif ou négatif $\frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux

$$y = x^{\frac{p}{q}} f(x).$$

Lorsque x tourne autour du point $x = 0$, y prend q valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_q$ qui se déduisent de l'une d'elles par les substitutions du groupe

$$(b) \qquad Y = \varepsilon y, \qquad \varepsilon^q = 1.$$

La fonction y^q est l'invariant le plus simple de ce groupe et nous remarquons immédiatement que cet invariant est *méromorphe au point* $x = 0$

$$y^q = x^p [f(x)]^q.$$

C. Nous réunirons ici les cas qui n'ont pas été étudiés en A ou en B.

Lorsque x tourne autour du point 0, y prend, en général, une infinité de valeurs, qui se déduisent de l'une d'elles par les substitutions du groupe

$$(\gamma) \qquad Y = e^{2n\alpha i\pi} y, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \quad \ldots.$$

Ce groupe est compris dans le groupe continu

$$(c) \qquad Y = t y$$

dont l'invariant différentiel le plus simple est $\frac{y'}{y}$. Cet invariant est *méromorphe autour du point* $x = 0$

$$\frac{y'}{y} = P'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\alpha}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

L'analyse des cas A, B, C nous conduit donc à ce résultat, *qu'à tout point singulier d'une équation linéaire homogène du premier ordre à coefficients rationnels, est attaché un groupe de transformations linéaires* (a), (b) *ou* (c), *dont les invariants sont méromorphes au voisinage du point singulier*.

Ce résultat une fois acquis, il n'est pas difficile d'arriver à la conviction que le même fait a lieu pour les singularités de toutes les équations linéaires à coefficients rationnels. Pour le démontrer d'une façon précise, je suivrai une méthode exactement parallèle à celle qu'emploie M. Picard (*Trai*[illegible] *d'Analyse*, t. III) pour arriver à la notion du groupe de rationalité [illegible] équation linéaire.

2. *Groupes de méromorphie des points singuliers d'une équation linéaire.* — Considérons l'équation différentielle linéaire

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + p_n y = 0,$$

dont nous supposons pour le moment les coefficients rationnels. Désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales et posons

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n,$$

les quantités u étant des fonctions rationnelles arbitraires.

En différentiant cette équation n^2 fois et remplaçant, lorsqu'il y a lieu, $\frac{d^n y_i}{dx^n}$ par sa valeur tirée de l'équation (1), on obtient un système d'équations exprimant $V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{n^2} V}{dx^{n^2}}$ en fonctions linéaires et homogènes de $y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}, y_2, \ldots, \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}$.

En éliminant ces n^2 quantités, on voit que la fonction V satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels d'ordre n^2, si les u sont des fonctions rationnelles *arbitraires* (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 532). Cette équation, que l'on nomme la *résolvante* de l'équation (1), s'écrit

$$(E) \qquad \frac{d^{n^2} V}{dx^{n^2}} + P_1 \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}} + \ldots + P_{n^2} V = 0.$$

De plus, le même système d'équations montre que les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et leurs dérivées s'expriment par des fonctions linéaires à coefficients rationnels de $V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}}$

$$y_1 = \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \alpha_{n^2} \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}},$$
$$y_2 = \beta_1 V + \beta_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \beta_{n^2} \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_n = \lambda_1 V + \lambda_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \lambda_{n^2} \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}}.$$

Ces formules montrent qu'à toute intégrale de l'équation (E) correspond un système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation (1). Ce sera un système fondamental, sauf le cas où le déterminant formé par les y et leurs dérivées

jusqu'à l'ordre $n - 1$ serait nul, ce qui donnerait l'équation

$$(\varphi) \qquad \varphi\left(x, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \dots, \frac{d^k \mathrm{V}}{dx^k}\right) = 0, \qquad k \leq m^2 - 1.$$

φ étant un polynome entier par rapport à tous ses arguments. Ainsi, à toute intégrale de l'équation (E), ne satisfaisant pas à l'équation (φ), correspond un système fondamental d'intégrales de l'équation (1).

Ceci posé, considérons un point singulier a de l'équation (1); les coefficients des équations (1), (E) et (φ) sont rationnels en x et, par suite, méromorphes au voisinage du point a. Il pourra arriver que certaines solutions de l'équation (E), n'appartenant pas à l'équation (φ), vérifient l'équation

$$(f) \qquad f\left[(x), \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \dots, \frac{d^p \mathrm{V}}{dx^p}\right] = 0,$$

f étant un polynome entier, par rapport aux quantités V, $\frac{d\mathrm{V}}{dx}, \dots, \frac{d^p \mathrm{V}}{dx^p}$ *dont les coefficients sont des fonctions de* x, *non plus rationnelles, mais méromorphes au point* a (¹).

Nous verrons plus tard que, en général, c'est-à-dire si l'équation (1) est prise arbitrairement, il n'y a pas d'autre équation (f) que l'équation (E) elle-même.

Mais il peut aussi en être autrement et nous allons étudier les cas très étendus où il existe des équations (f); parmi toutes ces équations, considérons celles qui sont d'ordre moindre et, parmi celles-ci, l'une de celles de moindre degré en $\frac{d^p \mathrm{V}}{dx^p}$ que nous appellerons (f). Dans ce cas, f est algébriquement irréductible par rapport à $\frac{d^p \mathrm{V}}{dx^p}$ et il est facile de voir que toute solution de (f) appartient à l'équation (E). En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait déduire des équations (E) et (f) une équation (f_1) d'ordre moindre que vérifieraient toutes les solutions communes à (E) et à (f) parmi lesquelles sont certaines intégrales de (E) ne satisfaisant pas à (φ). L'existence d'une telle équation (f_1) est contraire à l'hypothèse; l'intégrale générale de (f) appartient donc à l'équation (E).

(¹) C'est ici que ces considérations se distinguent de celles de M. Picard qui, étudiant les intégrales dans tout le plan, considère une équation (f) rationnelle aussi par rapport à x.

Il en résulte que cette intégrale s'écrit

$$V = \omega_1 V_1 + \omega_2 V_2 + \ldots + \omega_{n'} V_{n'};$$

les V_i étant des solutions indépendantes de l'équation (E) et les ω_i des constantes. En écrivant que cette équation vérifie l'équation (f), nous obtenons des relations nécessairement algébriques entre les constantes ω_i, qui permettent de les exprimer en fonctions algébriques de p constantes arbitraires [car l'intégrale de (f) doit dépendre de p constantes]. Ainsi les p constantes figurent algébriquement dans l'intégrale générale de f

$$V = V[(x), \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p] = V[(x), \lambda].$$

Ceci acquis, soit $y_1^0, \ldots, y_n^0$ le système fondamental correspondant à une solution $V^0 = V[(x), \lambda^0]$, et $y_1^1, \ldots, y_n^1$, celui qui correspond à la solution $V^1 = V[(x), \lambda^1]$. Pour que les expressions $y_1^0, \ldots, y_n^0, y_1^1, \ldots, y_n^1$ aient un sens bien déterminé et unique, nous supposerons que l'on ait fait, dans le domaine du point a, une coupure rendant uniformes toutes les intégrales de l'équation linéaire. Il suffit, par exemple, de tracer une ligne partant de a et allant jusqu'à la limite du domaine; les fonctions y^0, y^1 et, par suite, V^0 et V^1 sont alors bien déterminées et uniformes.

Les intégrales y^0 dépendent algébriquement des quantités λ^0 et les intégrales y^1 des quantités λ^1; mais l'on a

$$(2) \qquad \begin{cases} y_1^1 = a_{11} y_1^0 + a_{12} y_2^0 + \ldots + a_{1n} y_n^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n^1 = a_{n1} y_1^0 + a_{n2} y_2^0 + \ldots + a_{nn} y_n^0, \end{cases}$$

et il résulte de ces équations que les quantités a, qui sont indépendantes de x, sont des fonctions algébriques des paramètres λ^0 et λ^1. Si nous donnons aux λ^0 des valeurs numériques fixes en laissant varier les λ^1, les équations (2) définiront un ensemble de transformations linéaires dont les coefficients dépendent algébriquement des paramètres variables.

Cet ensemble forme un groupe.

Nous devons démontrer que le produit de deux transformations de l'ensemble (2) est une transformation de cet ensemble. Pour cela, considérons une troisième intégrale de l'équation (f), $V^2 = V[(x), \lambda^2]$, ne satisfaisant pas à l'équation (φ). Il lui correspond le système fondamental $y_1^2, \ldots, y_n^2$ et

l'on a

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1^2 = b_{11} y_1^0 + b_{12} y_2^0 + \ldots + b_{1n} y_n^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n^2 = b_{n1} y_1^0 + b_{n2} y_2^0 + \ldots + b_{nn} y_n^0, \end{cases}$$

les quantités b_{ik} n'étant pas autre chose que les quantités a_{ik} où l'on a remplacé les valeurs λ^1 par les valeurs λ^2.

Le produit des transformations (2) et (3) est

$$(4)\qquad \begin{cases} Y_1 = b_{11} y_1^1 + b_{12} y_2^1 + \ldots + b_{1n} y_n^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_n = b_{n1} y_1^1 + b_{n2} y_2^1 + \ldots + b_{nn} y_n^1, \end{cases}$$

et il nous faut prouver que l'on a les relations

$$(5)\qquad \begin{cases} Y_1 = c_{11} y_1^0 + c_{12} y_2^0 + \ldots + c_{1n} y_n^0 = y_1^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_n = c_{n1} y_1^0 + c_{n2} y_2^0 + \ldots + c_{nn} y_n^0 = y_n^3, \end{cases}$$

où les quantités c_{ik} ont précisément les valeurs que prennent les quantités a_{ik} quand on y remplace les λ^1 par de nouvelles valeurs λ^3.

Cela revient à démontrer que les intégrales Y correspondent à une intégrale $V^3 = V[(x), \lambda^3]$ appartenant à (f).

Les systèmes fondamentaux y^0, y^1, y^2, Y correspondent respectivement aux intégrales V^0, V^1, V^2, V de la résolvante (E) et nous savons que les trois premières appartiennent à (f); il faut démontrer que V est aussi une intégrale de (f).

Or on a

$$\begin{aligned} V^0 &= u_1 y_1^0 + \ldots + u_n y_n^0, \\ V^1 &= u_1 y_1^1 + \ldots + u_n y_n^1, \\ V^2 &= u_1 y_1^2 + \ldots + u_n y_n^2 = U_1 y_1^0 + \ldots + U_n y_n^0, \\ V\ &= u_1 Y_1 + \ldots + u_n Y_n = U_1 y_1^1 + \ldots + U_n y_n^1, \end{aligned}$$

d'après les formules (3) et (4). En remplaçant dans les deux dernières égalités les intégrales y^0 et y^1 par leurs valeurs en fonction de V^0 et de V^1, nous obtenons

$$\begin{aligned} V^2 &= R\left[(x), V^0, \frac{dV^0}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^0}{dx^p}\right], \\ V\ &= R\left[(x), V^1, \frac{dV^1}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^1}{dx^p}\right], \end{aligned}$$

où l'expression R est une fonction rationnelle des quantités V, $\frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}$, dont les coefficients sont des fonctions de x méromorphes au point a. Les dérivées $\frac{d^{p+i}V}{dx^{p+i}}$ ont été éliminées à l'aide de l'équation (f).

Si je fais maintenant sur l'équation $f = 0$ la transformation

$$V' = R\left[(x), V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right], \tag{5}$$

cette équation deviendra

$$f'\left[(x), V', \frac{dV'}{dx}, \ldots, \frac{d^pV'}{dx^p}\right] = 0,$$

qui admettra la solution $V' = V^2$. Cela suffit pour démontrer qu'elle est identique à l'équation

$$f\left[(x), V', \frac{dV'}{dx}, \ldots, \frac{d^pV'}{dx^p}\right] = 0.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la fonction V^2 et, en général, toutes les solutions communes aux équations $f = 0$, $f' = 0$ vérifieraient une équation

$$f_1\left[(x), V', \frac{dV'}{dx}, \ldots, \frac{d^{p_1}V'}{dx^{p_1}}\right] = 0,$$

qui serait d'ordre inférieur à celui de f, ce qui est contraire à notre hypothèse fondamentale.

La transformation (5) change donc l'équation $f = 0$ en elle-même; V est donc une intégrale de cette équation et le théorème que nous avions en vue est démontré.

Ainsi les transformations linéaires homogènes (2) forment un groupe. Nous exprimerons ce fait que les coefficients a de ces transformations dépendent algébriquement des paramètres arbitraires en disant que ce groupe est *algébrique*.

Nous énoncerons donc, comme conclusion à ce paragraphe, ce premier résultat :

Théorème I. — *A tout point singulier a d'une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre n, à coefficients rationnels, est attaché un groupe algébrique de transformations linéaires homogènes à n variables.*

Ce groupe g_a sera appelé le *groupe de méromorphie* de l'équation relatif au point a.

3. *Propriétés du groupe de méromorphie.* — Nous allons établir deux propriétés fondamentales de ce groupe qui justifieront le nom que nous venons de lui donner; elles sont tout à fait analogues aux propriétés du groupe de rationalité d'une équation linéaire démontrées par MM. Picard et Vessiot.

Théorème II. — *Toute fonction rationnelle de x, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées qui s'exprime par une fonction de x, méromorphe au point a, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_n$ une substitution du groupe g_a.*

Lorsque nous parlons de l'invariabilité d'une fonction, nous la considérons toujours comme dépendant de la seule variable x. Il peut très bien arriver que la fonction considérée où les y sont regardés comme des variables indépendantes, soit altérée par une transformation linéaire, tandis que sa valeur ne change pas lorsqu'on y a remplacé les y par les intégrales de l'équation considérée; c'est de cette dernière invariabilité qu'il s'agit ici.

Supposons que l'on ait

$$F(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, \ldots) = F_0(x),$$

et remplaçons $y_1^0, \ldots, y_n^0$ et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de V^0; nous obtenons

$$F(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, \ldots) = G\left[(x), V^0, \frac{dV^0}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^0}{dx^p}\right] = F_0(x).$$

Puisque $F_0(x)$ est méromorphe autour du point a, l'équation

$$G\left[(x), V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right] = F_0(x)$$

est analogue à l'équation (f) et elle a, avec cette dernière équation, une intégrale commune V^0 ne satisfaisant pas à (φ). Elle admet donc toutes les solutions de (f) et l'on a

$$G\left[(x), V^1, \frac{dV^1}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^1}{dx^p}\right] = F_0(x).$$

Enfin l'égalité

$$F(x, y_1^1, \ldots, y_n^1, \ldots) = G\left[(x), V^1, \frac{dV^1}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^1}{dx^p}\right]$$

nous conduit à

$$F(x, y_1^1, \ldots, y_n^1, \ldots) = F_0(x) = F(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, \ldots).$$

La fonction F est donc invariable au sens que nous avons donné à ce mot.

Théorème III. — *Toute fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées qui reste invariable par les transformations du groupe g_a est une fonction de x, méromorphe au point a.*

Soit $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ une fonction rationnelle de tous ces arguments, telle que

$$F(x, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1, \ldots) = F(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, \ldots).$$

En remplaçant les intégrales y^0 et y^1 par leurs valeurs en fonction des intégrales V^0 et V^1, nous obtenons

$$G\left[(x), V^1, \frac{dV^1}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^1}{dx^p}\right] = G\left[(x), V^0, \frac{dV^0}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^0}{dx^p}\right].$$

Ainsi, quelle que soit l'intégrale V de l'équation $f = 0$, on a

$$G\left[(x), V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right] = F_0(x).$$

Je dis que $F_0(x)$ est une fonction méromorphe au point a. En effet, si μ est le degré de f par rapport à $\frac{d^pV}{dx^p}$, on peut supposer G de degré $\mu - 1$ au plus. Donnons à x une valeur b voisine de a et considérons les intégrales de $f = 0$ qui, pour $x = b$, prennent, ainsi que leurs $p - 1$ premières dérivées, des valeurs initiales arbitraires $V_0, \left(\frac{dV}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{p-1}V}{dx^{p-1}}\right)_0$; ces intégrales sont en nombre μ, puisque $f = 0$ donne μ valeurs distinctes pour $\frac{d^pV}{dx^p}$. L'équation

$$G\left[(b), V_0, \left(\frac{dV}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{p-1}V}{dx^{p-1}}\right)_0, \frac{d^pV}{dx^p}\right] = F_0(b)$$

doit être vérifiée pour ces μ valeurs de $\frac{d^pV}{dx^p}$ et puisqu'elle est de degré $\mu - 1$

en $\frac{d^p V}{dx^p}$, elle est identiquement vérifiée. Ainsi, quelles que soient les valeurs attribuées à V, $\frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}$, G garde la même valeur; elle ne dépend donc pas de ces variables et l'on a

$$F_0(x) = G\left[(x), V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right] = G\left[(x), V_0, \left(\frac{dV}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^p V}{dx^p}\right)_0\right],$$

ce qui prouve que $F_0(x)$ est méromorphe au voisinage de a.

Les théorèmes II et III expriment les deux propriétés fondamentales du groupe de méromorphie de l'équation linéaire relatif au point a. Ils sont tout à fait analogues aux théorèmes de Galois sur les groupes des équations algébriques, de MM. Picard et Vessiot sur les groupes de rationalité des équations différentielles linéaires.

Ces deux propriétés sont d'ailleurs caractéristiques du groupe g_a qui est ainsi formé de toutes les transformations linéaires laissant invariables toutes les fonctions rationnelles de x, y_1, ..., y_n et de leurs dérivées, méromorphes au point a. En effet, supposons que toutes ces transformations forment un groupe G_a différent du groupe g_a. Le théorème II montre que le groupe G_a contient toutes les transformations du groupe g_a, qui est donc un de ses sous-groupes. De plus, le théorème III nous apprend que toutes les fonctions invariables par rapport à g_a sont méromorphes au point a et par suite invariables par rapport au groupe G_a.

Les invariants du groupe G_a sont donc les mêmes que ceux du sous-groupe g_a; cela suffit pour pouvoir affirmer que ces groupes sont identiques.

4. *Groupe de méromorphie et groupe de monodromie au point a.* — Lorsque la variable x tourne autour du point a en franchissant la coupure tracée au n° 2, les intégrales y^0 se changent en des intégrales z^0 qui s'expriment en fonction des y^0 par les formules

$$z_i^0 = \alpha_{i1} y_1^0 + \alpha_{i2} y_2^0 + \ldots + \alpha_{in} y_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui définissent une substitution linéaire S. Lorsque x tourne un nombre quelconque de fois autour du point a, le groupe de substitution des intégrales se compose de la substitution S et de ses puissances; c'est, co[illegible] l'on sait, le groupe de monodromie de l'équation dans le domai[illegible] point a.

Ce groupe, qui est toujours discontinu, ne se confond avec le gr[illegible] de méromorphie relatif au point a, que dans les seuls cas particuliers

celui-ci est aussi discontinu. C'est ainsi qu'au n° 1 les groupes (a) et (b) sont à la fois les groupes de monodromie et de méromorphie relatifs à l'origine. Au contraire, dans le cas général C, le groupe (γ) est un sous-groupe du groupe de méromorphie (c).

Ce dernier résultat est général : *le groupe de méromorphie contient le groupe de monodromie.*

En effet, lorsque x tourne autour du point a, les intégrales y^0 se changent en les intégrales z^0 et l'intégrale V^0 de (f) en une autre intégrale U^0 de cette même équation. La substitution S correspond au changement de V^0 en U^0; elle appartient donc au groupe de méromorphie.

5. *Le groupe de méromorphie est déterminé à une transformation linéaire près.* — Nous avons choisi arbitrairement une quelconque des équations (f) qui remplissent les conditions fixées au n° 2. Que devient le groupe de méromorphie lorsqu'on remplace l'équation (f) par une autre équation (f_1)?

Par le procédé employé au n° 2, nous définirons un nouveau groupe g_{1a}. Aux intégrales U^0 et U^1 de l'équation $f_1(U) = 0$ correspondent les systèmes fondamentaux $z_1^0, \ldots, z_n^0$ et $z_1^1, \ldots, z_n^1$ de l'équation linéaire; le groupe g_{1a} sera formé de toutes les transformations linéaires faisant passer des intégrales z^0 aux intégrales z^1, lorsqu'on suppose que U^0 est une intégrale déterminée de (f_1) et U^1 son intégrale générale.

Nous avons les relations

$$(6) \qquad z_i^0 = A_{i1} y_1^0 + A_{i2} y_2^0 + \ldots + A_{in} y_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où il résulte

$$U^0 = u_1 z_1^0 + \ldots + u_n z_n^0 = \sum_{ik} A_{ik} u_i y_k^0 = \alpha V^0 + \beta \frac{dV^0}{dx} + \ldots,$$

α et β étant des fonctions rationnelles de x.

Il est maintenant facile de voir que la transformation

$$U = \alpha V + \beta \frac{dV}{dx} + \ldots$$

change l'équation $f(V) = 0$ en l'équation $f_1(U) = 0$. En effet, si nous désignons par $f'(U) = 0$ l'équation transformée de (f), les deux équations (f_1) et (f') ont une intégrale commune U^0 et, par suite, ont toutes leurs intégrales communes, comme nous l'avons déjà vu bien souvent.

Donc, si nous appelons U^1 l'intégrale de (f_1) qui correspond à V^1, nous aurons

$$U^1 = \alpha V^1 + \beta \frac{dV^1}{dx} + \ldots$$

et cette formule nous conduit immédiatement aux relations

$$(7) \qquad z_i^1 = A_{i1} y_1^1 + A_{i2} y_2^1 + \ldots + A_{in} y_n^1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les équations (6) et (7) montrent que *le groupe g_{1a} est le transformé du groupe g_a par une substitution linéaire convenable.* Nous dirons que ces groupes sont *homologues* dans le groupe linéaire homogène général formé par toutes les transformations linéaires à n variables, ou bien encore qu'ils appartiennent au même *type*.

La démonstration suivante ([1]) nous conduira plus rapidement au même résultat.

Lorsqu'on a choisi pour $y_1^0, \ldots, y_n^0$ un système bien déterminé d'intégrales

$$y_1^0 = f_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad y_n^0 = f_n^0(x)$$

(le sens des expressions f^0 est bien déterminé et unique, lorsqu'on a effectué une coupure dans le domaine du point a) le groupe de méromorphie est bien déterminé, car c'est, comme on l'a vu au n° 3, le groupe formé par toutes les transformations linéaires qui laissent invariables toutes les fonctions rationnelles de x, $y_1^0, \ldots, y_n^0$ et leurs dérivées qui sont méromorphes au point a, après qu'on y a remplacé les quantités y_i^0 par les expressions f_i^0.

Mais ce choix d'intégrales est arbitraire, et nous pourrions tout aussi bien désigner par les lettres $y_1^0, \ldots, y_n^0$ et prendre pour point de départ de nos considérations les nouvelles intégrales que l'on obtiendrait par la résolution des équations

$$f_i^0 = A_{i1} y_1^0 + \ldots + A_{in} y_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce ne sont plus alors les mêmes fonctions de $y_1^0, \ldots, y_n^0$ qui sont méromorphes au point a, mais, au contraire, d'autres fonctions qui se déduisent des premières en changeant y_i^0 en $A_{i1} y_1^0 + \ldots + A_{in} y_n^0$. Le groupe de transformations linéaires qui laissera invariables ces nouvelles fonctions sera donc le transformé du premier groupe par cette substitution linéaire.

([1]) Ce mode de raisonnement est emprunté à M. Vessiot qui l'emploie pour établir le théorème analogue relatif au groupe de rationalité.

Remarque. — Pour la commodité du langage, nous avons supposé jusqu'ici que l'équation différentielle linéaire étudiée avait ses coefficients rationnels; cela n'est nullement nécessaire : il suffit que ces coefficients soient méromorphes au point a.

6. *Réduction du problème d'intégration au point a.* — Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des intégrales de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

et vérifient par suite les égalités

$$\frac{d^n y_i}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En résolvant ces équations linéaires par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_n$, nous obtenons le système d'équations différentielles suivant, que vérifient les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$,

$$(8) \qquad \frac{\Delta_1}{\Delta} = -p_1, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_i}{\Delta} = -p_i, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta} = -p_n.$$

On a posé

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \cdots & y_1 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

et Δ_i est le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ les éléments de la colonne de rang i par $\frac{d^n y_1}{dx^n}, \ldots, \frac{d^n y_n}{dx^n}$.

Nous remarquons que les premiers membres des équations du système (8) sont des invariants différentiels du groupe linéaire homogène général; les seconds membres sont des fonctions rationnelles connues de la variable indépendante. Nous aurons souvent à considérer de tels systèmes d'équations que nous nommerons *systèmes canoniques*.

Nous voulons étudier les intégrales dans le voisinage du point a. Pour cela, nous développons les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_n$ suivant les puissances croissantes de $x - a$; ces fonctions sont méromorphes au point a, de sorte que le nombre des termes à exposants négatifs est limité. L'étude des inté-

grales autour du point a ou, comme nous dirons à l'avenir, le problème d'intégration au point a, consiste en l'étude des équations (8), lorsque la variable indépendante reste dans le domaine du point a. Nous allons voir de quelle importance est, pour cette étude, la notion de groupe de méromorphie.

Soit g_a le groupe de méromorphie de l'équation relatif au point a. Les invariants différentiels de ce groupe sont méromorphes en a, d'après le théorème III. Prenons, parmi ces invariants, les plus simples $f_1, f_2, \ldots, f_r$ en nombre suffisant pour que les transformations qui n'altèrent pas $f_1, f_2, \ldots, f_r$ soient les transformations du groupe g_a et celles-là seulement. Ces fonctions f forment alors un système d'invariants caractéristiques du groupe g_a. Lorsqu'on y remplace les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par leur valeur exprimée en x, ces invariants deviennent des fonctions $f^0(x)$ méromorphes en a. Les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vérifient donc le système d'équations suivant :

$$f_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = f_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad f_r(y) = f_r^0(x). \tag{9}$$

De plus, toute autre relation

$$\mathrm{F}\left[(x), y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right] = 0,$$

où F est un polynome par rapport aux $y_1, \ldots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}$, dont les coefficients sont méromorphes en x, sera une conséquence des équations (9).

En effet, la fonction F reste invariable pour toutes les transformations du groupe g_a (théorème II), c'est-à-dire pour toutes les transformations qui n'altèrent pas $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Elle s'exprime donc en fonction rationnelle de $f_1, f_2, \ldots, f_r, \dfrac{df_1}{dx}, \ldots$, avec des coefficients méromorphes en x (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 558) :

$$\mathrm{F}\left[(x), y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right] = \mathrm{G}\left[(x), f_1, f_2, \ldots, f_r, \frac{df_1}{dx}, \ldots\right].$$

La relation $\mathrm{G} = 0$ doit être identiquement vérifiée quand on y remplace les f_i par les expériences f_i^0, sans quoi on aurait une relation où figurerait seule la variable indépendante. La relation $\mathrm{F} = 0$ n'est donc pas distincte des équations (9).

En particulier, les équations (8) sont une conséquence des équations (9); il en résulte que ces dernières sont en nombre au moins égal à n. Dans le cas où $r = n$, les invariants $f_1, f_2, \ldots, f_r$ sont indépendants; dans le cas où r est plus grand que n, les invariants $f_1, f_2, \ldots, f_r$ sont liés par $r - n$ relations algébriques par rapport aux f et à leurs dérivées.

Nous arrivons ainsi à définir les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ comme intégrales du système (9). Les premiers membres des équations de ce système sont des invariants différentiels du groupe de méromorphie; les seconds membres sont des fonctions de x, méromorphes au point a. C'est un *système canonique*.

De plus, toute équation, telle que $F = 0$ entre $y_1, y_2, \ldots y_n$, peut se déduire par différentiation et élimination des équations (9). Donc, si l'on ne fait pas d'autres opérations que des différentiations et des éliminations, on ne peut remplacer le système (9) par un système plus simple; il est, à ce point de vue, *irréductible*.

La considération du groupe de méromorphie nous a donc permis de remplacer le système canonique (8) par le système (9) qui est plus simple, lorsque le groupe g_a ne contient qu'une partie des transformations du groupe linéaire homogène général. Le problème d'intégration au point a est alors ramené à une forme plus simple, mais il n'est plus susceptible d'autre réduction analogue.

Enfin, dès que l'on a intégré le système (9), on obtient toutes les intégrales du système (8) en faisant sur les intégrales obtenues une transformation linéaire homogène quelconque.

7. *Étude analytique des singularités.* — Dans l'étude analytique des intégrales autour du point a nous aurons plusieurs cas à distinguer :

A. *Le groupe g_a contient la seule transformation identique.*

Les invariants $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont alors tout simplement $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et l'on a

$$y_1 = f_1^0(x), \qquad y_2 = f_2^0(x), \qquad \ldots, \qquad y_n = f_n^0(x).$$

Ces intégrales sont méromorphes au point a et le calcul des quantités f^0 donne leurs développements en séries. Ces expressions peuvent être obtenues par les méthodes de M. Fuchs.

B. *Le groupe g_a est un groupe discontinu.*

Les équations du groupe ne contiennent alors aucun paramètre arbitraire

et le nombre N de ses transformations est nécessairement fini, puisque les relations entre les a qui les définissent (n° 2) sont algébriques.

Les équations

$$(9) \qquad f_1 = f_1^0(x), \quad \dots, \quad f_r = f_r^0(x)$$

seront donc vérifiées pour N systèmes fondamentaux que l'on obtiendra en effectuant sur une solution quelconque $y_1, y_2, \dots, y_n$ les N substitutions du groupe g_a (théorème III). De plus, il n'y aura pas d'autres solutions, car les fonctions f gardent la même valeur pour les seules substitutions du groupe g_a. Nous pouvons donc supposer que le système d'invariants caractéristiques $f_1, f_2, \dots, f_r$ dépend seulement de $y_1, y_2, \dots, y_n$, car, s'il contenait les dérivées de ces fonctions, les équations (9) seraient vérifiées par une infinité de systèmes d'intégrales $y_1, \dots, y_n$.

Pour calculer $y_1, y_2, \dots, y_n$ il faudra résoudre les équations (9) par rapport à $y_1, y_2, \dots, y_n$. Puisque les fonctions f^0 sont méromorphes au point a, la résolution conduira à des expressions algébriques au voisinage du point a. Mais on peut préciser bien davantage la forme des intégrales.

Nous avons vu, plus haut, que le groupe de méromorphie contient le groupe de monodromie; je dis que, dans le cas qui nous occupe, ces deux groupes sont identiques. En effet, toute fonction rationnelle de x, y_1, $y_2, \dots, y_n$ et de leurs dérivées, qui est invariable pour les substitutions du groupe de monodromie, est uniforme autour du point a; elle est donc méromorphe, car il résulte de la forme des intégrales que les termes à exposants négatifs sont en nombre limité.

De même, toute fonction rationnelle de x, y_1, y_2, $\dots$, y_n et de leurs dérivées, qui est méromorphe au point a, reste invariable pour toutes les transformations du groupe de monodromie. Ce dernier groupe est donc confondu avec le groupe de méromorphie.

Or, le groupe de monodromie est composé, comme nous l'avons vu au n° 4, d'une substitution S et de ses diverses puissances, qui doivent être ici en nombre N. Le groupe de méromorphie qui lui est identique est donc le groupe cyclique formé par les substitutions

$$S, \quad S^2, \quad \dots, \quad S^N = 1.$$

Puisque ce groupe n'est déterminé qu'à une transformation linéaire près, je puis supposer que la transformation S a la forme suivante :

$$Y_1 = a_1 y_1, \quad \dots, \quad Y_n = a_n y_n,$$

où les a_i sont des quantités déterminées, telles que

$$a_i^N = 1.$$

Les invariants de ce groupe sont tout simplement

$$y_1^N, \quad y_2^N, \quad \ldots, \quad y_n^N,$$

et les équations (9) deviennent

$$y_1^N = (x-a)^\alpha [A + A_1(x-a) + \ldots], \qquad \ldots, \qquad y_n^N = (x-a)^\lambda [L + L_1(x-a) + \ldots],$$

d'où l'on déduit

$$y_1 = (x-a)^{\frac{\alpha}{N}} [A' + A'_1(x-a) + \ldots], \qquad \ldots, \qquad y_n = (x-a)^{\frac{\lambda}{N}} [L' + L'_1(x-a) + \ldots].$$

Le point a est un point singulier algébrique; les développements que nous venons d'obtenir peuvent se calculer par les méthodes de M. Fuchs.

C. *Le groupe g_a contient une infinité de transformations.*

Les équations du groupe contiennent alors des paramètres variables et les invariants $f_1, f_2, \ldots, f_r$ renferment certainement les dérivées des fonctions y. L'étude des intégrales au voisinage du point a revient à l'étude du système

$$f_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right) = f_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad f_r\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right) = f_r^0(x).$$

Pour faire l'intégration il faudra introduire des expressions analytiques nouvelles : intégrales définies, exponentielles, etc. Le point a n'est plus un point singulier algébrique et, sauf dans des cas particuliers que nous allons faire connaître, les intégrales ne peuvent être obtenues par les méthodes de M. Fuchs.

Quelques exemples simples éclairciront ces généralités.

I. Les équations du groupe g_a sont

$$Y_1 = a y_1, \qquad Y_2 = b y_2, \qquad \ldots, \qquad Y_n = l y_n,$$

où les a, b, …, l sont m paramètres arbitraires.

Les invariants les plus simples de ce groupe sont

$$\frac{y'_1}{y_1}, \quad \frac{y'_2}{y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{y'_n}{y_n}.$$

Ces invariants sont méromorphes autour du point a, de sorte que les équations (9) deviennent ici

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{y_1'}{y_1} = P_1'\left(\dfrac{1}{x-a}\right) + \dfrac{\alpha_1}{x-a} + A_1 + B_1(x-a) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{y_n'}{y_n} = P_n'\left(\dfrac{1}{x-a}\right) + \dfrac{\alpha_n}{x-a} + A_n + B_n(x-a) + \ldots, \end{array}\right.$$

les expressions P_1', ..., P_n' étant des polynomes en $\frac{1}{x-a}$.

En intégrant, nous obtenons

$$\begin{array}{l} y_1 = e^{P_1\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\alpha_1}[A_1' + B_1'(x-a) + \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = e^{P_n\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\alpha_n}[A_n' + B_n'(x-a) + \ldots]. \end{array}$$

On dit alors que l'équation admet, au point a, n intégrales normales. Lorsque les polynomes P sont tous nuls, les intégrales sont dites *régulières* au point a; on sait reconnaître, par les méthodes de M. Fuchs, dans quels cas l'équation a toutes ses intégrales régulières au point a et l'on peut alors calculer leurs développements en série.

II. Supposons que, pour une équation du second ordre, le groupe de méromorphie relatif au point a soit

$$Y_1 = a y_1, \qquad Y_2 = b y_1 + a y_2.$$

Les invariants caractéristiques de ce groupe sont

$$\frac{y_1'}{y_1}, \quad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)',$$

ils s'expriment par des fonctions méromorphes de x et les équations (9) deviennent

$$\begin{array}{l} \dfrac{y_1'}{y_1} = P'\left(\dfrac{1}{x-a}\right) + \dfrac{\alpha}{x-a} + A + B(x-a) + \ldots, \\ \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{\beta}{x-a} + \varphi'(x-a). \end{array}$$

P désigne ici un polynome en $\frac{1}{x-a}$ et φ une fonction méromorphe au point a, d'ailleurs quelconque.

En intégrant, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
y_1 &= e^{P\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\alpha}[A' + B'(x-a) + \ldots],\\
y_2 &= y_1[\beta \log(x-a) + \varphi(x-a)].
\end{aligned}
$$

Lorsque le polynome P est nul, nous reconnaissons la forme donnée par M. Fuchs, pour les singularités logarithmiques des équations du second ordre. Les intégrales sont alors régulières au point a et l'on peut calculer leurs développements en série.

8. *Décomposition du problème d'intégration autour du point* **a**. — Ce qui précède suffit à montrer combien l'étude des intégrales de notre équation linéaire autour du point a est intimement liée à la nature du groupe de méromorphie; nous allons montrer de quelle importance est la *structure* de ce groupe.

On sait le rôle que joue, dans la résolution d'une équation algébrique par la méthode de Galois, la structure du groupe de l'équation; dans le problème d'intégration d'une équation linéaire, la structure du groupe de rationalité joue le même rôle, comme l'a montré M. Vessiot. La structure du groupe de méromorphie a exactement la même signification pour le problème d'intégration autour du point a.

Les modes de raisonnement étant les mêmes dans les deux théories, je me bornerai à énoncer les résultats obtenus, renvoyant pour les démonstrations au *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. III, p. 557), où il suffira de remplacer les mots *fonctions rationnelles* par *fonctions méromorphes* autour du point a.

Au point de vue qui nous occupe, le groupe g_a peut présenter deux aspects différents : il peut se faire qu'il ne contienne aucun sous-groupe invariant; on dit alors que c'est un groupe *simple;* dans le cas contraire, c'est un groupe *composé*.

Lorsque le groupe g_a est simple, le problème d'intégration autour du point a n'est pas susceptible de décomposition; il comporte l'étude de l'équation différentielle (f) dont l'ordre p est égal au nombre de paramètres du groupe. Nous dirons que c'est un problème simple d'ordre p.

Supposons maintenant que le groupe g_a soit composé, et considérons une *décomposition normale* du groupe

$$g_a, \quad g_a^1, \quad g_a^2, \quad \ldots, \quad g_a^s = 1.$$

obtenue de la façon suivante : g_a^1 est un sous-groupe invariant à p_1 paramètres de g_a, qui n'est contenu dans aucun autre sous-groupe invariant de g_a et qui est nommé, pour cela, *sous-groupe invariant maximum de* g_a; g_a^2 est un sous-groupe invariant maximum de g_a^1 et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un groupe simple g_a^{s-1}, qui n'a d'autre sous-groupe invariant que celui formé par la transformation identique $g_a^s = 1$.

Le problème d'intégration se décompose alors en s problèmes plus simples qu'il faudra résoudre successivement par la marche théorique suivante.

Les invariants caractéristiques $f_1, f_2, \ldots, f_r$ du groupe g_a s'expriment par des fonctions méromorphes autour du point a, que l'on suppose connues. Ces invariants f sont des fonctions rationnelles des invariants f^1 du groupe g_a^1 et de leurs dérivées

$$f_1 = \mathrm{R}_1\left(f_1^1, \ldots, f_{r_1}^1, \frac{df_1^1}{dx}, \ldots\right), \qquad \ldots, \qquad f_r = \mathrm{R}_r\left(f_1^1, \ldots, f_{r_1}^1, \frac{df_1^1}{dx}, \ldots\right).$$

L'intégration de ce système d'équations différentielles permettra d'exprimer les invariants f^1 par des fonctions de x qui ne seront plus méromorphes; cette intégration constitue un problème simple d'ordre $p - p_1$.

On connaîtra donc en fonction de x les invariants caractéristiques f^1 du groupe g_a^1; un problème simple d'ordre $p^1 - p^2$ nous permettra de calculer les expressions des invariants caractéristiques f^2 du groupe g_a^2, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on obtienne en fonction de x les expressions des invariants caractéristiques de g_a^s, qui sont précisément $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Notre problème d'intégration a donc été décomposé en une suite de s problèmes simples d'ordre $p - p^1, p^1 - p^2, \ldots, p^{s-1} - p^s = p^{s-1}$.

Un cas particulier fort intéressant est celui où le groupe g_a à p paramètres contient un sous-groupe invariant g_a^1 à $p - 1$ paramètres, celui-ci un sous-groupe invariant g_a^2 à $p - 2$ paramètres, et ainsi de suite; le groupe g_a est dit alors *intégrable*, et M. Lie a démontré que les transformations de ce groupe peuvent prendre la forme suivante (nous nous bornons aux équations du troisième ordre)

$$(g_a) \qquad \begin{cases} y_1 = a y_1, \\ y_2 = b y_1 + c y_2, \\ y_3 = d y_1 + e y_2 + f y_3. \end{cases}$$

Les invariants de ce groupe sont faciles à calculer. Nous trouvons d'abord

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{d \log y_1}{dx}.$$

Posons ensuite

$$y = y_1 \int z\, dx,$$

et désignons par z_1 et z_2 les valeurs de z correspondant à y_2 et y_3. Lorsqu'on effectue sur les y les transformations du groupe g_a, les z subissent les transformations

$$z_1 = \alpha z_1,$$
$$z_2 = \beta z_1 + \gamma z_2.$$

La fonction

$$\frac{z_1'}{z_1} = \frac{d}{dx} \log \frac{d}{dx} \frac{y_2}{y_1}$$

est donc un invariant du groupe g_a.

En posant $z_2 = z_1 \int u\, dx$, on trouverait de même que

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{d}{dx} \log \frac{d}{dx} \frac{z_2}{z_1}$$

est un autre invariant du groupe g_a.

Ces trois invariants sont des fonctions méromorphes de x et suffisent au calcul des intégrales y_1, y_2, y_3. On a, en effet,

$$\frac{y_1'}{y_1} = \mathrm{P}'\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{\alpha}{x-a} + \mathrm{A} + \mathrm{B}\,(x-a) + \ldots,$$
$$\frac{z_1'}{z_1} = \mathrm{Q}'\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{\beta}{x-a} + \mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1(x-a) + \ldots,$$
$$\frac{u_1'}{u_1} = \mathrm{R}'\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{\gamma}{x-a} + \mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_2(x-a) + \ldots,$$

où P, Q, R désignent des polynomes en $\frac{1}{x-a}$.

En intégrant, nous obtenons les expressions suivantes pour y_1, y_2, y_3

$$y_1 = e^{\mathrm{P}\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\alpha}\,\mathrm{F}(x-a),$$
$$y_2 = y_1 \int e^{\mathrm{Q}\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\beta}\,\mathrm{G}(x-a)\,dx,$$
$$y_3 = y_1 \int \left[e^{\mathrm{Q}\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\beta}\,\mathrm{G}(x-a) \int e^{\mathrm{R}\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\gamma}\,\mathrm{H}(x-a)\,dx \right] dx.$$

D'une façon générale, lorsque le groupe g_a est intégrable, les intégrales y s'expriment par des quadratures successives portant sur des fonctions dont la dérivée logarithmique est méromorphe.

Signalons encore la réciproque de ce théorème :

Lorsque, au voisinage du point singulier a, les intégrales s'expriment par des quadratures successives à partir des fonctions méromorphes, le groupe de méromorphie g_a est intégrable.

M. Thomé s'est occupé de l'étude des points singuliers de cette nature; il a montré que les coefficients des polynomes P, Q, R et des séries F, G, H s'expriment algébriquement en fonction des coefficients de l'équation linéaire. (Voir *Journal de Crelle*, t. 96.)

Nous résumerons comme il suit les résultats acquis dans ce premier Chapitre :

A tout point singulier d'une équation différentielle linéaire homogène, à coefficients rationnels, est attaché un groupe algébrique de transformations linéaires homogènes à n variables.

Ce groupe g_a, que nous nommons *groupe de méromorphie de l'équation relatif au point a*, n'est déterminé qu'à une transformation linéaire près.

Il est caractérisé par les propriétés suivantes :

1° *Toute fonction rationnelle de x, des intégrales et de leurs dérivées, qui s'exprime par une fonction de x méromorphe au point a, reste invariable par les substitutions du groupe.*

2° *Toute fonction rationnelle de x, des intégrales et de leurs dérivées, qui reste invariable par les substitutions du groupe, s'exprime par une fonction de x méromorphe au point a.*

Le groupe g_a contient les substitutions du groupe de monodromie relatif au point a.

Le système d'équations exprimant, en fonction de x, les invariants caractéristiques du groupe, forme un système canonique irréductible qui définit, autour du point a, les intégrales de notre équation.

La structure du groupe g_a joue un rôle fondamental dans l'étude analytique des intégrales autour de a.

Nous avons ainsi classé les singularités des équations différentielles linéaires d'ordre n, et il y a autant de classes de points singuliers qu'il y a de types de sous-groupes dans le groupe linéaire homogène général à n variables.

CHAPITRE II.

GROUPES DE MÉROMORPHIE ET GROUPE DE RATIONALITÉ.

---

1. *Groupe de méromorphie dans un domaine* D. — Nous avons étudié jusqu'ici les intégrales de notre équation linéaire dans un cercle de centre a ne contenant aucun autre point singulier de l'équation. Les résultats que nous avons obtenus s'étendent immédiatement à un domaine quelconque D à contour simple. Afin de fixer d'une façon précise les valeurs des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$, nous faisons, dans le domaine D, des coupures qui rendent les intégrales uniformes; il suffit, par exemple, d'y tracer des coupures partant des points singuliers et aboutissant à la frontière du domaine; nous choisissons ensuite, pour $y_1, \ldots, y_n$, des intégrales déterminées.

Cela posé, tous les raisonnements faits au Chapitre précédent subsistent lorsque nous remplaçons l'expression *méromorphe au point a* par *méromorphe dans le domaine* D. Nous démontrons donc l'existence d'un groupe algébrique de transformations linéaires homogènes g_D, caractérisé par les deux propriétés suivantes :

1° *Toutes les fonctions rationnelles de x, de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées, qui s'expriment par des fonctions de x méromorphes dans le domaine* D, *sont inaltérées par les substitutions du groupe.*

2° *Toutes les fonctions rationnelles de x, de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées, qui sont inaltérées par les substitutions du groupe, s'expriment par des fonctions de x méromorphes dans le domaine* D.

Ce groupe g_D sera appelé le *groupe de méromorphie de l'équation, relatif au domaine* D; il contient le groupe de monodromie relatif à ce domaine.

Le groupe g_D est parfaitement déterminé dès que l'on a choisi les intégrales $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ de l'équation linéaire, que l'on désigne par $y_1, \ldots, y_n$. Mais ce choix est entièrement arbitraire et l'on aurait pu appeler $y_1, \ldots, y_n$ des combinaisons linéaires quelconques de $f_1(x), \ldots, f_n(x)$. Le nouveau groupe de méromorphie serait alors le transformé du groupe g_D par une substitution linéaire.

Comme au n° 6 du Chapitre I, nous verrons que l'étude des intégrales de

l'équation linéaire dans le domaine D revient à l'étude du système canonique

$$f_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right) = f_1^0(x), \quad \ldots, \quad f_r\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right) = f_r^0(x),$$

où $f_1, \ldots, f_r$ forment un système caractéristique d'invariants différentiels du groupe g_D et $f_1^0, \ldots, f_r^0$ sont des fonctions de x méromorphes dans D. Tout ce que nous avons dit au Chapitre précédent sur l'étude analytique de ce système et sur la décomposition du problème d'intégration reste vrai, sauf le point particulier suivant :

Lorsque le groupe g_D est discontinu, on démontre, comme au n° 7, qu'il est composé d'un nombre fini de transformations et qu'il se confond avec le groupe de monodromie; mais, ici, ce dernier groupe n'est pas cyclique en général, et l'on ne peut poursuivre le raisonnement que nous avons fait alors.

Si le domaine D s'étend jusqu'à recouvrir tout le plan, les fonctions de x que nous considérons, méromorphes dans tout le plan, sont rationnelles et le groupe de méromorphie devient le *groupe de rationalité* G de l'équation linéaire. Les intégrales de cette équation sont donc définies par le système canonique irréductible

$$F_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right) = F_1^0(x), \quad \ldots, \quad F_r\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right) = F_r^0(x),$$

où $F_1, \ldots, F_r$ constituent un système caractéristique d'invariants différentiels du groupe G, et $F_1^0, \ldots, F_r^0$ sont des fonctions rationnelles de x.

2. *Relation entre le groupe de rationalité et les groupes de méromorphie.* — Considérons un domaine D_1 contenu entièrement dans un domaine D. Les transformations du groupe g_{D_1} laissent invariables les fonctions rationnelles des intégrales y et de leurs dérivées qui sont méromorphes dans le domaine D_1 et *a fortiori* dans le domaine D; elles appartiennent donc au groupe g_D. Nous pouvons donc énoncer le théorème :

Le groupe de méromorphie relatif à un domaine D_1 *est contenu dans le groupe de méromorphie relatif à tout domaine qui comprend* D_1.

En particulier, les divers groupes g_a, g_b, ... *relatifs aux points singuliers* a, b, ... *de l'équation linéaire sont des sous-groupes du groupe de rationalité.*

Nous savons que ce dernier groupe contient le groupe de monodromie de l'équation. Il est facile de montrer que :

Le groupe de rationalité est le plus petit groupe algébrique G *contenant le groupe de monodromie et les groupes* $g_a, g_b, \ldots$.

En effet, nous avons vu plus haut qu'il contient ces deux catégories de groupe; c'est donc le groupe G ou un groupe qui contient le groupe G.

Puisque le groupe de rationalité contient le groupe G, toutes les fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées qui s'expriment rationnellement sont invariables par rapport au groupe G.

De plus, les fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées, qui sont invariables par rapport au groupe G, s'expriment par des fonctions de x uniformes dans tout le plan, puisque les transformations du groupe de monodromie ne changent pas leur valeur; elles sont aussi méromorphes au voisinage de chaque point singulier, car elles restent inaltérées par les transformations du groupe de méromorphie relatif à ce point. Toutes les fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées, invariables par rapport au groupe G, sont donc rationnelles.

Le groupe G possédant les deux propriétés caractéristiques du groupe de rationalité se confond avec lui.

Dans le cas où l'équation différentielle linéaire a toutes ses intégrales régulières autour des points singuliers, M. Klein avait démontré que le groupe de rationalité est le plus petit groupe algébrique contenant le groupe de monodromie. (*Voir* Klein, *Lineare Differentialgleichungen.*)

CHAPITRE III.

EXTENSION DES MÉTHODES DE GALOIS.

1. *Nouvelle définition du groupe de monodromie.* — Le fait fondamental qui nous a permis d'édifier les théories précédentes est celui-ci : en faisant les opérations élémentaires, addition, multiplication, division, différentiation sur des fonctions méromorphes, on obtient encore des fonctions méromorphes. En étendant une dénomination employée en

Algèbre, nous exprimerons cette propriété en disant que les fonctions méromorphes dans un domaine donné forment un *corps;* les fonctions rationnelles forment aussi un corps.

La seule hypothèse nécessaire pour que les méthodes de Galois et les démonstrations de M. Picard s'appliquent est que les fonctions de x que l'on considère forment un corps. Les fonctions uniformes sont précisément dans ce cas; nous pouvons donc refaire la théorie précédente en remplaçant les mots *fonctions méromorphes de x* par *fonctions uniformes de x.*

Notre conclusion sera qu'à chaque domaine D est attaché un groupe algébrique G de transformations linéaires homogènes, caractérisé par ce fait, qu'il laisse invariables toutes les fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées qui s'expriment par des fonctions de x uniformes dans le domaine D, et celles-là seulement.

Une démonstration analogue à celle donnée plus haut (Chap. II, n° 2) nous montre que *ce groupe* G *est le plus petit groupe algébrique qui contienne le groupe de monodromie du domaine* D. C'est un sous-groupe du groupe de méromorphie g_D.

Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont donc définies dans le domaine D par un système canonique tel que

$$(1)\quad \mathfrak{J}_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right) = \mathfrak{J}_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{J}_r\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right) = \mathfrak{J}_r^0(x),$$

où les $\mathfrak{J}$ forment un système caractéristique d'invariants du groupe G et sont des fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées, tandis que les $\mathfrak{J}^0(x)$ sont des fonctions uniformes dans le domaine D.

Pour donner un exemple, nous allons déterminer le groupe G relatif au domaine d'un point singulier. Le groupe de monodromie est un groupe cyclique, en général infini, formé d'une substitution S et de ses puissances. On peut, en général, choisir les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de façon que S ait la forme

$$Y_1 = \varepsilon_1 y_1, \qquad Y_2 = \varepsilon_2 y_2, \qquad \ldots, \qquad Y_n = \varepsilon_n y_n,$$

où les ε sont des constantes numériques fixes. Le plus petit groupe algébrique contenant S et ses puissances sera, en général,

$$Y_1 = a_1 y_1, \qquad Y_2 = a_2 y_2, \qquad \ldots, \qquad Y_n = a_n y_n,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des paramètres variables. Les invariants caractéris-

tiques de ce groupe sont $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_n}{y_n}$ et les équations (1) deviennent

$$\frac{y'_1}{y_1} = \theta_1(x), \qquad \frac{y'_2}{y_2} = \theta_2(x), \qquad \ldots, \qquad \frac{y'_n}{y_n} = \theta_n(x);$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sont des fonctions uniformes au voisinage du point singulier et développables par la formule de Laurent.

Ce qui précède n'est qu'une transition pour nous permettre de passer à une extension plus complète encore des méthodes de Galois. Cependant il était intéressant d'attirer l'attention sur les équations (1) qui définissent les intégrales par des équations très simples rationnelles en $y_1, \ldots, y_n$ avec des coefficients uniformes en x.

Mais il est bien certain que, au point de vue où nous nous plaçons maintenant, il n'est nullement nécessaire de nous borner à la considération de fonctions rationnelles des intégrales : il nous suffit de prendre des fonctions uniformes de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées. Cela sera même nécessaire si nous voulons ne faire appel à aucune autre notion que celle d'uniformité.

Les modifications qu'il convient alors d'apporter aux démonstrations du Chap. I sont les suivantes :

Le premier membre de l'équation

$$f\left(x, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right) = 0$$

sera une fonction uniforme de x, V, $\frac{d\mathrm{V}}{dx}, \cdots$ et nous supposerons que cette équation est irréductible, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune autre équation de même nature dont toutes les intégrales vérifient $f = 0$.

Ceci posé, on poursuit facilement les raisonnements faits au Chap. I, à cette différence près que l'on ne peut démontrer ici que le groupe trouvé est algébrique.

Nous démontrons donc l'existence d'un groupe Γ, tel que :

1° Toute fonction uniforme des intégrales qui s'exprime par une fonction uniforme de x est invariable par les substitutions du groupe;

2° Toute fonction uniforme des intégrales qui est invariable par les substitutions du groupe s'exprime par une fonction uniforme de x.

Ce groupe Γ n'est donc pas autre chose que le groupe de monodromie; en général, il n'est pas algébrique.

Nous pouvons donc définir les intégrales par des équations analogues aux

équations (1). Le groupe Γ est discontinu, en ce sens que ses substitutions ne contiennent pas de paramètre arbitraire; il possède donc un système caractéristique d'invariants $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$, fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seulement; ce sont des fonctions transcendantes dans le cas où le groupe n'est pas algébrique. Ces invariants s'expriment par des fonctions uniformes de x :

$$(2) \qquad \Phi_1(y_1, \ldots, y_n) = \Phi_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad \Phi_s(y_1, \ldots, y_n) = \Phi_s^0(x).$$

Les intégrales de notre équation différentielle s'obtiendront en résolvant ce système d'équations transcendantes.

2. *Étude analytique des intégrales.* — L'équation différentielle à coefficients rationnels

$$(3) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

ou bien encore le système d'équations (Chap. I, n° 6)

$$(4) \qquad \frac{\Delta_1}{\Delta} = -p_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\Delta_n}{\Delta} = -p_n,$$

définissent les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à partir du corps des fonctions rationnelles. Mais, tandis que ces équations conservent la même forme apparente, elles peuvent définir, suivant les valeurs des fonctions p, des fonctions y aussi différentes que le sont, par exemple, les fonctions rationnelles, les fonctions algébriques, les fonctions exponentielles, etc. Notre système d'équations (3) et (4) est donc tout à fait insuffisant pour mettre en évidence la *position* des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$, par rapport au corps des fonctions rationnelles. Cette position sera au contraire parfaitement déterminée et apparente si nous définissons les fonctions y par les équations que donne le groupe de rationalité (Chap. II, n° 1).

La connaissance du groupe de rationalité d'une équation différentielle linéaire donne la position de ses intégrales par rapport au corps des fonctions rationnelles. C'est la *première partie* de l'étude analytique des intégrales.

Que faut-il faire maintenant pour poursuivre cette étude, pour trouver de nouvelles propriétés des intégrales? Il faut évidemment chercher comment elles se relient avec un ensemble de fonctions possédant une pro-

priété plus générale que la rationalité. Nous chercherons donc à les classer, à trouver leur *position* par rapport au corps des fonctions méromorphes dans un domaine.

La connaissance du groupe de méromorphie d'une équation différentielle linéaire, relatif à un domaine quelconque, donne, dans ce domaine, la position de ses intégrales par rapport au corps des fonctions méromorphes. C'est l'étude des singularités, *deuxième partie* de l'étude analytique des intégrales.

Enfin, pour terminer, nous étendrons encore le corps des fonctions de comparaison en y admettant toutes les fonctions uniformes.

La connaissance du groupe de monodromie d'une équation différentielle linéaire donne la position de ses intégrales par rapport au corps des fonctions uniformes. C'est la *troisième partie* de l'étude analytique des intégrales.

3. *Comparaison des méthodes de Galois et de Riemann.* — Les méthodes de Galois, convenablement étendues, nous conduisent donc des propriétés de rationalité, qui font l'objet des théorèmes de MM. Picard et Vessiot, aux propriétés de méromorphie exposées au Chapitre I, et enfin aux propriétés d'uniformité étudiées d'une manière systématique par Riemann. Il est intéressant de suivre la marche inverse.

Lorsqu'il s'agit de définir le système de fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, que nous venons d'étudier, Riemann se donne le groupe de monodromie Γ (c'est-à-dire la position du système de fonctions par rapport au corps des fonctions uniformes) et la forme des fonctions au voisinage des points singuliers.

Si les invariants caractéristiques du groupe Γ sont $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont données par les équations, en général transcendantes,

$$\Phi_1 = \Phi_1^0(x), \quad \ldots, \quad \Phi_s = \Phi_s^0(x),$$

où les Φ^0 sont des fonctions uniformes.

Si l'on veut remonter de là aux équations différentielles rationnelles que vérifient nos fonctions, on considère le plus petit groupe algébrique contenant Γ; les invariants différentiels de ce groupe seront des fonctions uniformes de x

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_1^0(x), \quad \ldots, \quad \mathfrak{I}_r = \mathfrak{I}_r^0(x).$$

Riemann se bornait à l'étude des fonctions dont les développements dans

le domaine des points singuliers contiennent seulement un nombre limité de termes à exposants négatifs. Il est alors évident que les fonctions $\mathfrak{F}^0$ sont méromorphes au voisinage de chaque point singulier et par suite rationnelles.

On a ainsi obtenu un système d'équations différentielles rationnelles entre $y_1, \ldots, y_n$ et x.

Mais, dans le cas où les points singuliers sont quelconques, la théorie de Riemann ne peut donner aucun moyen pour déterminer les fonctions dans le voisinage des singularités. Il faut alors recourir à la notion du groupe de méromorphie qui permet cette détermination.

Nous devons donc donner, pour définir les fonctions, non seulement leur groupe de monodromie, mais aussi leurs groupes de méromorphie avec l'expression de leurs invariants.

Dans ces conditions, les invariants d'un groupe algébrique quelconque contenant le groupe de monodromie et les groupes de méromorphie seront rationnels et conduiront à un système d'équations différentielles rationnelles entre les fonctions et la variable.

Nous avons seulement étudié les fonctions vérifiant les équations linéaires; il est bien clair que tout ce que nous venons de dire s'étend immédiatement à ces équations dont l'intégrale générale s'exprime en fonction d'un nombre limité d'intégrales particulières, et qui ont été étudiées par MM. Lie, Vessiot, Picard, etc.

CHAPITRE IV.

CLASSIFICATION DES TRANSCENDANTES QUI INTÈGRENT LES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

---

1. *Décomposition de l'ensemble des équations linéaires d'ordre n.* — Les théorèmes de M. Picard donnent une première subdivision des transcendantes qui intègrent les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels d'ordre n. Nous rangerons dans la même *classe* toutes celles de ces équations qui ont le même groupe de rationalité. Il y a donc autant de classes d'équations linéaires d'ordre n qu'il y a de types de groupes algébriques dans le groupe linéaire homogène général à n variables. Toutes les

équations d'une même classe ont même théorie d'intégration (*voir* Vessiot, *Annales de l'École Normale;* 1892) et définissent des transcendantes qui sont liées à leurs dérivées et à la variable indépendante par des relations rationnelles tout à fait analogues.

Le calcul de ces transcendantes exige l'intégration de l'équation $f = 0$, d'ordre égal à celui du groupe de rationalité; on peut donc dire, à ce point de vue, que ces transcendantes sont d'autant plus compliquées que le groupe de rationalité aura plus de paramètres. Ce n'est pas là le seul élément de complication : la structure du groupe joue aussi, comme nous l'avons vu, un rôle essentiel.

Les principes qui nous ont servi à classer les points singuliers nous permettent de poursuivre la classification donnée par M. Picard. Considérons, en effet, la classe d'équations différentielles linéaires ayant le groupe de rationalité G. Les groupes de méromorphie attachés à leurs points singuliers sont des sous-groupes $G_1, \ldots, G_N$ de G; nous réunirons, dans une même famille, celles de ces équations linéaires qui ont

s points singuliers de groupe G,
s_1 » » » G_1,
. . . . ,
s_N » » » G_N.

C'est ainsi que les équations considérées par M. Fuchs, et dont les intégrales sont régulières en leurs points singuliers, seront séparées des équations dont les intégrales ont des points essentiels compliqués et appartiendront à des familles dont les singularités ont des groupes très simples, analogues à ceux étudiés au Chapitre I, n° 7.

Enfin, notre dernière subdivision consistera à revenir aux ensembles d'équations linéaires, considérés par Riemann (*Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen*); nous rangerons, dans une même *espèce*, toutes les équations obtenues en faisant, sur une équation déterminée

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

la transformation

$$(2) \qquad Y = A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}},$$

où les expressions $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles.

Les équations d'une même espèce ont évidemment même groupe de

monodromie; nous allons démontrer qu'elles ont même groupe de rationalité et que les groupes de méromorphie, relatifs à leurs points singuliers, sont les mêmes. Il en résultera que toutes les équations d'une même espèce appartiennent à une même famille; la dernière spécification s'obtient donc bien en subdivisant les ensembles déjà formés.

2. *Équations linéaires appartenant à une même espèce.* — Il est bien certain que le problème de l'intégration est du même ordre de difficulté pour toutes les équations d'une même espèce. D'une façon plus précise, M. Schlesinger a démontré que :

Toutes les équations d'une même espèce ont même groupe de rationalité.

Avant de connaître les travaux de M. Schlesinger j'avais obtenu les mêmes résultats, par la démonstration suivante :

Supposons que la transformation (2), effectuée sur l'équation (1), nous conduise à la nouvelle équation

$$\frac{d^n Y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n Y = 0. \tag{3}$$

Je puis former pour ces deux équations la *même résolvante* d'ordre n^2, en posant

$$\begin{aligned} V &= a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n + b_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + l_n \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}, \\ &= \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_n Y_n + \beta_1 \frac{dY_1}{dx} + \ldots + \lambda_n \frac{d^{n-1} Y_n}{dx^{n-1}}. \end{aligned}$$

L'égalité a lieu en vertu de l'équation (2) et des équations obtenues en la différentiant.

La résolvante d'ordre n^2 nous conduira à la même équation (f)

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0,$$

rationnelle par rapport à toutes les variables, et deux systèmes fondamentaux correspondants des deux équations s'exprimeront en fonction d'une intégrale de (f) par les formules

$$\left.\begin{aligned} y_i &= f_i\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) \\ Y_i &= F_i\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que, l'intégrale V^0 nous donnera les systèmes fondamentaux $(y_1^0, \ldots, y_n^0)$ et $(Y_1^0, \ldots, Y_n^0)$ et l'intégrale V^1 les systèmes $(y_1^1, \ldots, y_n^1)$ et $(Y_1^1, \ldots, Y_n^1)$. Les équations du groupe de rationalité de la première équation sont

$$y_i^1 = a_{i1} y_1^0 + \ldots + a_{in} y_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et il est évident que l'équation (2) nous conduit aux mêmes relations entre les intégrales $(Y_1^0, \ldots, Y_n^0)$ et $(Y_1^1, \ldots, Y_n^1)$; les deux équations ont donc même groupe de rationalité.

En supposant que l'équation (f) a seulement ses coefficients méromorphes au voisinage du point singulier a, la même marche conduit au théorème :

Le groupe de méromorphie relatif à un point singulier a est le même pour toutes les équations d'une même espèce.

Ce théorème comprend toute une série de remarques qui ont été faites depuis longtemps [Poincaré, *Mémoire sur les fonctions zêta-fuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. V)]. C'est ainsi que, au voisinage du point a, les nombres des intégrales méromorphes, des intégrales qui restent régulières, des intégrales normales, etc., sont les mêmes pour toutes les équations de l'espèce considérée.

3. *Invariants communs à toutes les équations d'une espèce.* — Le groupe de rationalité et les groupes de méromorphie constituent donc des éléments invariants appartenant à toutes les équations d'une même espèce. Il est intéressant de faire connaître des invariants d'une nature toute différente et qui permettent souvent de décider par un calcul très simple si deux équations linéaires peuvent être de même espèce.

M. Thomé a montré que, si a est un point singulier d'une équation linéaire (1), on peut, en général, trouver n expressions de la forme

$$(4) \qquad e^{Q_i\left(\frac{1}{x-a}\right)} (x-a)^{\rho_i} [A_0^i + A_1^i (x-a) + \ldots] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

Q_i étant un polynome en $\frac{1}{x-a}$ et ρ_i une constante, qui satisfont formellement à l'équation différentielle. Ces *séries normales* ne sont pas convergentes en général, mais on peut cependant démontrer le théorème suivant :

Les polynomes Q_i restent les mêmes pour toutes les équations d'une même espèce et les exposants ρ_i ne varient que d'un nombre entier.

En effet, imaginons que l'on effectue sur l'équation (1) une transformation (2) déterminée; on peut calculer *algébriquement* les polynomes Q et les exposants ρ pour les deux équations. Mais, dans le cas où les séries normales sont convergentes, le théorème est évident et le calcul supposé fait en doit constater l'exactitude; il est donc vrai dans tous les cas, car l'hypothèse de la convergence des séries n'intervient jamais dans la recherche des polynomes Q et des exposants ρ.

Dans certains cas spéciaux, il est impossible de trouver n développements (4) vérifiant formellement l'équation différentielle. M. Fabry (*Thèse de Doctorat,* 1885) a fait voir qu'on peut alors former des séries de la forme suivante :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &e^{Q_i\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\rho_i}[f_0(x-a)+\log(x-a)f_1(x-a)+\ldots\\ &\qquad\qquad\qquad +\log^{\lambda-1}(x-a)f_{\lambda-1}(x-a)],\end{aligned}\right.$$

où Q_i est un polynome en $(x-a)^{-\frac{1}{n}}$, ρ_i une constante et $f_0, f_1, \ldots, f_{\lambda-1}$ des séries ordonnées suivant les puissances de $(x-a)^{\frac{1}{n}}$ et, en général, divergentes. Ces *séries anormales* satisfont formellement à l'équation linéaire et la formule (5) donne un groupe de λn développements linéairement distincts.

On peut alors démontrer comme plus haut que :

Pour toutes les équations différentielles linéaires de même espèce on obtient les mêmes groupes de séries anormales; les polynomes Q_i, les nombres n et λ restent les mêmes et les exposants ρ ne varient que d'un multiple de $\frac{1}{n}$.

Les coefficients des polynomes Q et les exposants ρ sont des fonctions algébriques des coefficients de notre équation linéaire (1), qui sont invariables par rapport à toutes les transformations (2).

L'ensemble de ces transformations, qui font passer d'une équation de l'espèce considérée à une autre, forme évidemment un groupe. Mais ce groupe est tout à fait différent des groupes considérés par M. Lie. Il contient un nombre quelconque de paramètres arbitraires et ne peut être défini par des équations différentielles. On peut le rapprocher du groupe formé par l'ensemble de toutes les transformations birationnelles qui font passer d'une courbe algébrique appartenant à une classe déterminée à une autre courbe de la

même classe. L'existence d'invariants algébriques appartenant à de tels groupes est intéressante à signaler.

Ces fonctions invariantes nous donnent des conditions nécessaires pour que deux équations linéaires soient de même espèce; ces conditions ne sont pas suffisantes. Alors même que les équations ont même groupe de monodromie, elles ne sont pas suffisantes, sauf le cas où les séries normales (4) ou (5) sont toutes convergentes.

Peut-on trouver un système d'invariants donnant les conditions nécessaires et suffisantes?

Dans le cas particulier où les intégrales de l'équation sont régulières aux points singuliers, M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. V) a montré que la réponse est affirmative. Il a appris à former une équation réduite qui caractérise chaque espèce d'équation linéaire. Les coefficients de l'équation réduite seront les invariants cherchés.

Puisque les invariants donnés plus haut sont relatifs à la partie en quelque sorte essentielle des développements des intégrales aux points singuliers, il y a lieu de croire que le théorème de M. Poincaré est général. Je n'ai pu en trouver de démonstration satisfaisante.

Cependant, je puis énoncer le résultat suivant :

4. *On peut reconnaître, par un nombre fini d'opérations, si deux équations données sont de même espèce.*

Supposons que la transformation (2) fasse passer de l'équation (1) à l'équation (3) et considérons le système

$$Y_i = A_0 y_i + \ldots + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On en déduit

$$A_{n-1} = u_1 Y_1 + \ldots + u_n Y_n,$$

où l'on a posé

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \qquad u_i = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(n-1)}}.$$

Les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ forment un système fondamental de l'adjointe de Lagrange relative à l'équation (1). (Darboux, *Leçons sur la*

Théorie des surfaces, t. II, Chap. V); cette adjointe s'écrit :

$$(6) \qquad \frac{d^n u}{dx^n} - \frac{d^{n-1} p_1 u}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1)^n p_n u = 0.$$

La fonction A_{n-1} est donc une intégrale particulière de l'équation linéaire admettant les n^2 intégrales $u_i Y_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. Cette équation est d'ordre n^2 en général et on la forme facilement comme il suit : Posons

$$U = uY$$

et différentions cette équation n^2 fois en remplaçant, lorsqu'il y a lieu, $\frac{d^n u}{dx^n}$ et $\frac{d^n Y}{dx^n}$ par leurs valeurs tirées des équations (6) et (3). Nous obtenons un système de n^2+1 équations (7) exprimant U et ses n^2 premières dérivées en fonctions linéaires et homogènes des produits

$$\frac{d^r u}{dx^r}\frac{d^s Y}{dx^s} \qquad (r, s = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

En éliminant ces n^2 quantités, nous obtenons une équation linéaire homogène d'ordre n^2 à coefficients rationnels

$$(8) \qquad \frac{d^{n^2} U}{dx^{n^2}} + \ldots = 0.$$

Si les équations (1) et (3) appartiennent à la même espèce, cette équation (8) admet une intégrale rationnelle A_{n-1}.

Il est facile de voir s'il en est ainsi :

Les pôles des intégrales rationnelles de (8) sont les points singuliers $a, b, \ldots, l$ de cette équation; l'ordre maximum du pôle a est la valeur absolue α de la plus petite racine négative entière de l'équation déterminante relative au point a. Par conséquent, le produit

$$A'_{n-1} = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda A_{n-1}$$

est un polynome entier qui vérifie l'équation linéaire obtenue en posant

$$U_1 = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda U.$$

Il est facile de former cette équation à partir de l'équation (8)

$$\frac{d^{n^2} U_1}{dx^{n^2}} + \ldots = 0$$

et nous sommes ramenés à rechercher si cette équation admet comme intégrale particulière un polynome entier. Le degré de ce polynome est inférieur à la plus grande racine positive entière de l'équation déterminante relative au point à l'infini. La méthode des coefficients indéterminés permet donc le calcul du polynome A'_{n-1} au cas où il existe.

Supposons qu'il en soit ainsi et que l'équation (8) admette une intégrale rationnelle connue A_{n-1}. Cette intégrale s'écrit

$$A_{n-1} = \sum \alpha_{ik} u_i Y_k;$$

mais, en choisissant convenablement les intégrales Y, on peut la mettre sous la forme

$$A_{n-1} = \sum u_i Y_i.$$

La fonction A_{n-1} étant calculée, les fonctions A_{n-k} s'en déduisent facilement. On a, en effet,

$$A_{n-k} = \frac{1}{\Delta}\left(Y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y_1^{(n-k)}} + \ldots + Y_n \frac{\partial \Delta}{\partial y_n^{(n-k)}}\right),$$

$$A_{n-k} = v_1 Y_1 + \ldots + v_n Y_n.$$

Les fonctions v_i vérifient une équation linéaire d'ordre n, que M. Cels a étudiée sous le nom d'*adjointe de la* $n-k^{\text{ième}}$ *ligne de l'équation* (1); il a montré que l'intégrale v_i s'exprimait en fonction de l'intégrale u_i par une formule telle que

$$v_i = a u_i + b \frac{du_i}{dx} + \ldots + l \frac{d^{n-1} u_i}{dx^{n-1}}, \tag{9}$$

où les $a, b, \ldots, l$ sont rationnels.

Pour l'établir, il nous suffira de démontrer que, si la formule (9) est vraie pour les fonctions v_i, elle l'est encore pour les fonctions $w_i = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(n-k-1)}}$. Or, nous avons

$$\frac{dv_i}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(n-k)}} = \frac{1}{\Delta} \frac{d}{dx} \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(n-k)}} - \frac{\Delta'}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(n-k)}},$$

$$\frac{dv_i}{dx} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(n-k-1)}} - p_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(n-k)}} + (-1)^{k+1} p_{n-k} \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{n-1}}\right) - \frac{\Delta'}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(n-k)}},$$

$$\frac{dv_i}{dx} = w_i - p_1 v_i + (-1)^{k+1} p_{n-k} u_i + p_1 v_i = w_i + (-1)^{k+1} p_{n-k} u_i.$$

Nous obtenons donc la formule

$$w_i = (-1)^k p_{n-k} u_i + \frac{dv_i}{dx} \tag{10}$$

qui démontre le résultat annoncé et permettrait, au besoin, le calcul par voie de récurrence des expressions v_i, w_i.

La formule (9) nous donne

$$A_{n-k} = \sum v_i Y_i = a \sum u_i Y_i + b \sum \frac{du_i}{dx} Y_i + \ldots .$$

Mais les équations (7) obtenues plus haut permettent d'exprimer les quantités $\sum Y_i \frac{d^s u_i}{dx^s}$ en fonctions linéaires de A_{n-1} et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n^2 - 1$. Donc

$$A_{n-k} = b_0^k A_{n-1} + b_1^k \frac{dA_{n-1}}{dx} + \ldots + b_{n^2-1}^k \frac{d^{n^2-1} A_{n-1}}{dx^{n^2-1}},$$

où les b sont des fonctions rationnelles.

Ainsi, si l'équation (8) admet une intégrale rationnelle A_{n-1}, on en déduira que les fonctions A sont aussi rationnelles.

La condition nécessaire et suffisante pour que les équations (1) *et* (3) *appartiennent à la même espèce est que l'équation* (8) *ait une intégrale rationnelle.*

Car des formules

$$A_k = \frac{1}{\Delta} \sum Y_i \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(k)}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

on déduit

$$Y_i = A_0 y_i + A_1 \frac{dy_i}{dx} + \ldots + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

DEUXIÈME PARTIE.

DÉTERMINATION DU GROUPE DE RATIONALITÉ ET DES GROUPES DE MÉROMORPHIE.

CHAPITRE V.

LES ÉQUATIONS LINÉAIRES D'ORDRE QUELCONQUE.

---

1. *Résultats généraux.* — La méthode de M. Picard nous a conduits à la notion de groupe de rationalité par la considération d'une résolvante irréductible

$$f\left(x, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right) = 0$$

de l'équation E (Chap. I, n° 2). Mais la détermination effective du groupe de rationalité par cette voie se présente sous un aspect compliqué; on ne connaît aucun moyen direct de trouver la résolvante f.

M. Vessiot a décomposé en trois parties le problème de la recherche du groupe de rationalité :

1° *Déterminer tous les groupes algébriques de transformations linéaires homogènes à n variables.* — Les travaux de MM. Klein, Jordan et Lie, font connaître pour $n = 2, 3, 4$, tous les types de groupes discontinus et continus; il serait facile de déterminer les groupes complexes ou mixtes (*voir* plus loin, n° 2). De plus, MM. Jordan et Lie ont donné des théorèmes généraux sur les groupes à n variables.

Ce premier problème étant résolu, il reste à déterminer lequel de ces groupes est le groupe de rationalité de l'équation différentielle donnée. Nous savons qu'il n'y a pas lieu de distinguer deux groupes appartenant au même type. Les théorèmes II et III nous apprennent que ce groupe est le plus petit groupe algébrique dont les invariants s'expriment rationnellement. Nous sommes donc conduits à poser les problèmes suivants :

2° *Former pour chaque groupe algébrique trouvé ci-dessus un système caractéristique d'invariants différentiels.* — Lorsque les équations

du groupe G sont connues, ce problème n'exige que des différentiations et des éliminations; on peut donc le considérer comme résolu ([1]).

On obtient ainsi les invariants

$$u_1 = F_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right), \qquad \ldots, \qquad u_r = F_r\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right)$$

qui sont fonctions rationnelles de $y_1, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre n.

On peut alors former par élimination les résolvantes dont dépendent les invariants $u_1, \ldots, u_r$ lorsque $y_1, \ldots, y_n$ sont des intégrales de l'équation linéaire donnée. On trouve ainsi les équations différentielles

$$\Phi_1\left(x, u_1, \frac{du_1}{dx}, \ldots\right) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_r\left(x, u_r, \frac{du_r}{dx}, \ldots\right) = 0.$$

Si le groupe G est le groupe de rationalité ou le contient, $u_1, \ldots, u_r$ seront rationnels. Nous sommes donc conduits au dernier problème.

3° *Rechercher les intégrales rationnelles de ces équations.* — J'ai fait observer que ces équations résolvantes font partie d'une classe remarquable d'équations différentielles étudiées par M. Painlevé; ce sont les équations dont l'intégrale générale est une fonction rationnelle connue des constantes arbitraires.

En effet, l'intégrale générale de l'équation $\Phi_1 = 0$ s'écrit

$$U_1 = F_1\left(Y_1, \ldots, Y_n, \frac{dY_1}{dx}, \ldots\right) = F_1\left(\sum a_{1k} y_k, \ldots, \sum a_{nk} y_k, \sum a_{1k} y'_k, \ldots\right).$$

M. Painlevé a démontré que l'on peut, par des transformations algébriques connues, ramener ces équations aux équations linéaires et en calculer effectivement toutes les intégrales rationnelles ou algébriques à un nombre donné de branches; la détermination de toutes les intégrales algébriques exigerait l'étude de quadratures (*voir* Painlevé, *Comptes rendus*, juillet 1894).

Ces résultats résolvent donc complètement la question suivante :

([1]) La question des relations entre les invariants caractéristiques reste ouverte cependant. Il y a $n+p$ tels invariants entre lesquels existent p relations algébriques ou différentielles. Peut-on toujours trouver un système de n invariants caractéristiques indépendants?

Reconnaître si une équation linéaire donnée admet comme groupe de rationalité un groupe donné.

Cependant le problème de la recherche du groupe de rationalité n'est pas complètement résolu, car il y a une infinité de types de groupes algébriques contenus dans le groupe linéaire homogène général à n variables. Un exemple nous permettra de préciser davantage ce point.

Supposons que l'on veuille savoir si l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \tag{1}$$

admet comme groupe de transformations le groupe

$$Y_1 = t^p y_1, \qquad Y_2 = t^q y_2, \tag{g}$$

où p et q sont des entiers premiers entre eux.

Les invariants différentiels caractéristiques de ce groupe sont

$$\frac{y'_1}{y_1}, \quad \frac{y'_2}{y_2}, \quad \frac{y_2^p}{y_1^q};$$

et il nous est toujours possible de reconnaître si l'équation (1) admet deux intégrales y_1 et y_2 dont les dérivées logarithmiques sont rationnelles et d'en calculer les valeurs :

$$\frac{y'_1}{y_1} = \varphi_1(x), \qquad \frac{y'_2}{y_2} = \varphi_2(x).$$

Si maintenant les entiers p et q sont donnés, on pourra toujours reconnaître si $\frac{y_2^p}{y_1^q}$ est rationnel et savoir ainsi effectivement si le groupe de rationalité est g. Mais, si p et q sont inconnus, la détermination du groupe est ramenée au problème suivant :

Trouver deux nombres entiers p et q, tels que

$$e^{\int (p\varphi_2 - q\varphi_1) dx}$$

soit une fonction rationnelle de x.

On voit aussi que si l'on considère le groupe G, contenant le groupe g et dont les équations sont entièrement connues,

$$Y_1 = a y_1, \qquad Y_2 = b y_2, \tag{G}$$

où a et b sont des paramètres arbitraires, on peut alors décider effectivement si l'équation (1) admet comme groupe de rationalité G ou un de ses sous-groupes.

Ce qui précède nous conduit à indiquer la marche théorique suivante pour la recherche du groupe de rationalité.

Considérons les *sous-groupes maxima* contenus dans le groupe linéaire homogène général, c'est-à-dire les groupes qui ne sont compris dans aucun autre sous-groupe du groupe général.

Nous commencerons par rechercher si les invariants d'un ou plusieurs de ces sous-groupes maxima sont rationnels; c'est là une opération que nous saurons effectuer d'après ce qui a été expliqué plus haut. Cette méthode aura plusieurs avantages. Tout d'abord les groupes maxima sont en petit nombre, et nous verrons que leurs invariants ont une forme très simple qui facilite beaucoup les calculs; de plus, si, pour l'un de ces groupes, l'essai ne conduit pas à un système d'invariants rationnels, on peut écarter, dans les essais ultérieurs, tous ses sous-groupes. En particulier, si les invariants ne sont rationnels pour aucun des sous-groupes maxima, le groupe de rationalité sera le groupe linéaire homogène général.

Supposons, au contraire, que, pour l'un des groupes au moins G, les invariants caractéristiques soient rationnels; le groupe de rationalité sera G ou l'un de ses sous-groupes. On continuera donc en faisant l'essai de tous les sous-groupes maxima de G et ainsi de suite.

Lorsqu'on sera arrivé à un groupe G_s dont les invariants sont rationnels, mais dont aucun sous-groupe n'a tous ses invariants rationnels, ce groupe G_s sera le groupe de rationalité.

Tout ce que nous venons de dire s'applique aussi à la recherche du groupe de méromorphie; nous aurons alors à calculer les intégrales méromorphes $u_1, \ldots, u_r$ du système d'équations résolvantes.

Si l'on veut étudier de plus près le problème de la détermination du groupe de rationalité, il est nécessaire d'approfondir la théorie des groupes linéaires homogènes à n variables et de leurs invariants différentiels caractéristiques. C'est un point que je laisserai ici de côté, me réservant d'y revenir plus tard. Je vais donc abandonner ces généralités et étudier le problème de la détermination du groupe de rationalité et des groupes de méromorphie pour les équations des deuxième, troisième et quatrième ordre.

Les résultats obtenus dans cette étude seront d'une précision que l'on ne

peut espérer atteindre dans l'étude du cas général, et enfin ils nous indiqueront dans quelles directions les recherches peuvent se poursuivre avec fruit.

2. *Groupes discontinus, continus et mixtes.* — Nous avons vu, au Chapitre I, n° 7, que le groupe de rationalité G peut être composé d'un nombre fini de transformations; dans ce cas, il est nécessairement *discontinu*.

Il peut aussi contenir une infinité de transformations. Nous avons vu alors que ses équations dépendent de paramètres arbitraires. Nous ferons avec M. Lie la distinction suivante :

Le groupe G sera appelé *continu*, si toutes ses transformations forment un ensemble tel qu'on puisse passer d'une transformation quelconque de l'ensemble à une autre également quelconque, en faisant varier d'une façon continue les paramètres du groupe. Tel est, par exemple, le groupe à deux variables et à deux paramètres :

$$Y_1 = a y_1, \qquad Y_2 = b y_1 + y_2.$$

Nous dirons, au contraire, que le groupe G est *mixte* ou *complexe* s'il est formé d'un certain nombre d'ensembles continus séparés de transformations; le groupe G étant algébrique, ces ensembles sont en nombre fini. Tel est, par exemple, le groupe de toutes les transformations de coordonnées rectangulaires du plan, l'origine étant conservée; ce groupe G contient les deux ensembles continus

$$(1) \qquad \begin{cases} Y_1 = y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha, \\ Y_2 = y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha; \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} Y_1 = y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha, \\ Y_2 = -y_1 \sin\alpha - y_2 \cos\alpha. \end{cases}$$

Ces ensembles sont bien séparés, puisque le déterminant de leurs transformations est $+1$ pour le premier et -1 pour le second. De plus, nous voyons immédiatement que les transformations (1) forment un groupe continu g. Au contraire, les trasnformations de l'ensemble (2) considéré isolément ne forment pas un groupe; mais elles sont le produit d'une transformation de g et de la transformation

$$(S) \qquad Y_1 = y_1, \qquad Y_2 = -y_2.$$

Nous pouvons donc désigner l'ensemble des transformations (2) par le

symbole gS, et nous voyons que le groupe G est formé de la réunion des deux ensembles g et gS.

M. Lie a démontré que le même fait se produit pour tous les groupes mixtes (Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, Chap. XVIII).

Tout groupe mixte G contient un groupe continu g formé des transformations T et qui est le plus grand sous-groupe continu de G ou, comme nous dirons encore, son *sous-groupe continu* maximum. Les transformations de G qui n'appartiennent pas à g forment $m-1$ ensembles continus composés des transformations qui sont le produit des transformations de g par chacune des $m-1$ transformations $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$. Le groupe G est ainsi constitué par les m ensembles continus

$$T, \quad TS_1, \quad TS_2, \quad \ldots, \quad TS_{m-1}.$$

Pour la généralité des énoncés que nous donnerons au paragraphe suivant, il est bon d'étendre ces résultats aux groupes finis discontinus; le groupe g comprend alors la seule transformation identique et les substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$ sont les autres transformations du groupe G.

3. *Les invariants du sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité.* — Il est maintenant bien facile de démontrer que les invariants du groupe g sont des fonctions algébriques des invariants du groupe G.

En effet, soit u un invariant de g; si l'on effectue sur u les substitutions du groupe G, u prend les diverses déterminations $u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$, u_i désignant la fonction obtenue en effectuant sur u la transformation S_i.

Il en résulte que toute fonction symétrique de $u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ est un invariant du groupe G. Donc u est une fonction algébrique des invariants de G.

Si le groupe G est le groupe de rationalité d'une équation linéaire, ses invariants sont rationnels; nous en concluons que les invariants du groupe g sont algébriques.

Théorème. — *Les invariants du sous-groupe continu maximum g compris dans le groupe de rationalité s'expriment par des fonctions algébriques de x.*

Réciproquement, *si une fonction rationnelle des intégrales et de leurs dérivées s'exprime par une fonction algébrique de x, c'est un invariant du groupe g.*

Soit en effet $F_1\left(y, \frac{dy}{dx}, \cdots\right)$ une fonction rationnelle des intégrales et de leurs dérivées qui s'exprime par une fonction algébrique $f_1(x)$. Lorsque x parcourt dans le plan tous les contours que l'on peut imaginer et revient à son point de départ f_1 et F_1 prennent les p déterminations $f_1, f_2, \ldots, f_p$ et $F_1, F_2, \ldots, F_p$. Les fonctions symétriques de $F_1, F_2, \ldots, F_p$ s'expriment par des fonctions symétriques de $f_1, f_2, \ldots, f_p$; elles sont donc rationnelles. Le groupe de rationalité laisse donc invariables les fonctions symétriques de $F_1, F_2, \ldots, F_p$; il ne fait donc que permuter entre elles ces fonctions.

Le groupe g ne peut donc aussi faire autre chose que permuter F_1, $F_2, \ldots, F_p$; mais un groupe continu ne peut changer F_1 qu'en des fonctions formant avec F_1 un ensemble continu. Donc F_1 reste inaltéré par les transformations du groupe g.

Ajoutons enfin que, si un groupe continu possède les deux propriétés énoncées plus haut, c'est le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité.

Les mêmes théorèmes subsistent évidemment pour les groupes de méromorphie; les invariants de leurs sous-groupes continus maxima s'expriment par des fonctions à forme algébrique dans le domaine considéré.

Nous pouvons donc nous borner dans ce qui va suivre à la considération des groupes continus.

4. *Équations linéaires admettant des intégrales dont la dérivée logarithmique est algébrique.* — Nous verrons tout à l'heure que le problème de la détermination du groupe de rationalité revient à rechercher les intégrales d'une équation linéaire dont la dérivée logarithmique est algébrique. On peut énoncer à ce sujet quelques théorèmes généraux qui nous seront utiles plus tard.

On sait trouver pour l'équation à coefficients rationnels (ou algébriques)

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0, \tag{1}$$

les intégrales dont la dérivée logarithmique est algébrique.

Cherchons tout d'abord quelles formes peuvent avoir ces intégrales.

Soit

$$\frac{y'_1}{y_1} = \text{f. alg. de } x = u_1(x).$$

Lorsque x décrit dans le plan les divers contours distincts que l'on y peut tracer, la fonction $u_1(x)$ acquiert p valeurs distinctes $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, $u_p(x)$ qui sont les p déterminations de la fonction algébrique $u(x)$. Il y correspond p valeurs distinctes $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_p}{y_p}$ du quotient $\frac{y'}{y}$

$$\frac{y'_1}{y_1} = u_1(x), \qquad \frac{y'_2}{y_2} = u_2(x), \qquad \ldots, \qquad \frac{y'_p}{y_p} = u_p(x).$$

Les intégrales $y_2, \ldots, y_p$ sont les transformées de y_1 par la substitution du groupe de monodromie de l'équation (1) qui correspondent aux contours décrits par la variable x. Il faut remarquer que les substitutions du groupe de monodromie changent en général y_1 en une infinité d'autres intégrales de (1); mais toutes ces intégrales ne donnent que p valeurs distinctes pour le quotient $\frac{y'}{y}$ et ne diffèrent que par des facteurs constants des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Une première observation fort importante consiste en ce que *le nombre n étant donné, on peut assigner au nombre p une limite supérieure* N. Consulter à ce sujet le Mémoire de M. Jordan, *Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques* (*Journal de Crelle*, t. 84).

Parmi les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_p$, il y en a q, $y_1, y_2, \ldots, y_q$, $(q \leqq p)$, qui sont linéairement indépendantes; les autres $y_{q+1}, \ldots, y_p$ s'expriment en fonctions linéaires des q premières. *Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_q$ vérifient une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels.* Car les coefficients de l'équation linéaire que vérifient $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sont *algébriques* puisque $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_q}{y_q}$ sont algébriques, et *uniformes* puisque, en décrivant un contour quelconque, les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_q$ se changent en des fonctions linéaires de ces mêmes intégrales.

Nous pouvons former cette équation d'ordre q

$$\frac{d^q y}{dx^q} + \omega_1 \frac{d^{q-1} y}{dx^{q-1}} + \ldots + \omega_q y = 0. \tag{2}$$

Si $q = n$, c'est précisément l'équation (1); si q est plus petit que n, toutes les intégrales de (2) appartiennent à (1) et l'on sait trouver les équations qui jouissent de cette propriété (Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 522).

Le problème qui nous était proposé est donc simplifié dans le cas où

$q < n$ et il nous reste à reconnaître si l'équation (2) admet un système fondamental d'intégrales dont la dérivée logarithmique est algébrique.

Le nombre p des déterminations de la fonction algébrique $\frac{y'}{y} = u(x)$ est inférieur à un nombre fixe Q que l'on peut calculer dès que l'on connaît q.

La fonction symétrique

$$\frac{y'_1}{y_1} + \frac{y'_2}{y_2} + \ldots + \frac{y'_p}{y_p} = \frac{d}{dx} \log y_1 y_2 \ldots y_p$$

est une fonction rationnelle. Pour reconnaître si l'équation (2) admet de telles intégrales $y_1, \ldots, y_p$, nous formerons par différentiation et élimination l'équation linéaire que vérifie la fonction

$$Y = y_1 y_2 \ldots y_p.$$

Cette équation, qui a ses coefficients rationnels, admet pour intégrale le polynome le plus général d'ordre p formé avec les variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$; son ordre est égal au nombre de coefficients arbitraires qui entrent dans ce polynome.

Nous rechercherons les intégrales de cette équation dont la dérivée logarithmique est rationnelle, en employant la méthode exposée par M. Picard (*Traité d'Analyse*, t. III, p. 527).

Lorsqu'on a trouvé une telle intégrale, il faut reconnaître si elle est bien le produit de p intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_p$ de l'équation (2). On recherchera à l'aide de différentiations et d'éliminations s'il en est ainsi; en cas de réussite, le calcul donnera en même temps les autres fonctions symétriques $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_p}{y_p}$.

La fonction algébrique $\frac{y'}{y} = u(x)$ *sera donc entièrement connue.* Nous allons chercher à déterminer quel est alors le groupe de rationalité G de l'équation (2). L'étude que nous allons faire nous permettra de simplifier dans un grand nombre de cas les calculs que nous venons d'indiquer.

Nous avons vu plus haut (n° 3) que le sous-groupe continu maximum g de G laisse invariables les fonctions $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_p}{y_p}$, qui s'expriment algébriquement en x. Les transformations que g effectue sur les variables y_1, $y_2, \ldots, y_p$, sont donc de la forme

$$Y_1 = a_1 y_1, \qquad Y_2 = a_2 y_2, \qquad \ldots, \qquad Y_p = a_p y_p.$$

Nous distinguerons deux cas :

1° $p = q$. Les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_p = y_q$ sont linéairement indépendantes et forment un système fondamental de l'équation (2). Les équations du groupe g sont de la forme

$$Y_1 = a_1 y_1, \quad Y_2 = a_2 y_2, \quad \ldots, \quad Y_q = a_q y_q,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_q$ étant des paramètres arbitraires, distincts ou non.

Le groupe de monodromie contient par hypothèse des substitutions S_1, $S_2, \ldots, S_{k-1}$ qui font passer de y_1 à l'une quelconque des intégrales $y_2, \ldots$, y_q. Ces substitutions appartiennent aussi au groupe de rationalité qui comprendra les ensembles de transformations

$$g, \quad gS_1, \quad gS_2, \quad \ldots, \quad gS_{k-1}.$$

Les invariants $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_q}{y_q}$ sont les racines d'une équation irréductible d'ordre q à coefficients rationnels

$$u^q + r_1(x)u^{q-1} + \ldots + r_q(x) = 0$$

et les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sont données par les formules

$$\log y_1 = \int u_1\,dx, \quad \ldots, \quad \log y_q = \int u_q\,dx.$$

2° $p > q$. Nous pouvons supposer que les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sont linéairement indépendantes; $y_{q+1}, \ldots, y_p$ sont alors des fonctions linéaires de $y_1, \ldots, y_q$ et l'on a, par exemple,

$$(\alpha) \qquad y_{q+1} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_r y_r, \qquad r \leqq q, \qquad \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r \neq 0.$$

Nous savons que le groupe g effectue sur les variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$, des transformations de la forme

$$Y_1 = a_1 y_1, \quad \ldots, \quad Y_r = a_r y_r, \quad \ldots, \quad Y_q = a_q y_q, \quad Y_{q+1} = a_{q+1} y_{q+1}, \quad \ldots, \quad Y_p = a_p y_p.$$

Il en résulte, à cause de l'équation (α),

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_r = a_{q+1} = a$$

et les équations du groupe g deviennent

$$Y_1 = a y_1, \quad \ldots, \quad Y_r = a y_r, \quad Y_{r+1} = a_{r+1} y_{r+1}, \quad \ldots, \quad Y_p = a_p y_p.$$

Il y a dans le groupe de monodromie des transformations qui changent y_1 en y_{r+1}; si nous appliquons une telle transformation à l'équation (α), il vient

$$y_{\lambda_1} = \alpha_1 y_{r+1} + \alpha_2 y_{\lambda_2} + \ldots + \alpha_r y_{\lambda_r}.$$

Il peut arriver que, parmi les intégrales $y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, \ldots, y_{\lambda_r}$, il y ait une des intégrales $y_2, \ldots, y_r, y_{q+1}$ ou une de leurs combinaisons linéaires; on en conclut alors que

$$a_{\lambda_1} = a_{r+1} = a_{\lambda_2} = \ldots = a_{\lambda_r} = a.$$

Les équations du groupe g deviennent alors

$$Y_1 = a y_1, \quad \ldots, \quad Y_r = a y_r, \quad Y_{r+1} = a y_{r+1}, \quad Y_{r+2} = a_{r+2} y_{r+2}, \quad \ldots, \quad Y_p = a_p y_p$$

et l'on effectuera alors sur l'équation (α) la transformation qui fait passer de y_1 à y_{r+2} et ainsi de suite.

En poursuivant ainsi, nous obtiendrons un faisceau d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_s$ qui auront les deux propriétés suivantes : 1° une substitution du groupe g multiplie les variables $y_1, y_2, \ldots, y_s$ par le même facteur; 2° une substitution du groupe de monodromie ou bien échange $y_1, \ldots, y_s$ entre elles ou avec leurs combinaisons linéaires ou bien fait passer à un faisceau d'intégrales tout différent. On sait que, si $s = q$, le groupe de monodromie est appelé *primitif;* sinon, il est appelé *imprimitif.*

Dans ce dernier cas, considérons une de ces substitutions qui font passer du faisceau $y_1, \ldots, y_s$ au faisceau $y_{s+1}, \ldots, y_{2s}$; il est facile de voir que $y_{s+1}, \ldots, y_{2s}$ sont indépendantes entre elles et indépendantes aussi de $y_1, \ldots, y_s$. Elles ont les mêmes propriétés que $y_1, \ldots, y_s$.

En continuant ainsi, on décomposera le système fondamental $y_1, \ldots, y_q$ en ρ faisceaux $(y_1, \ldots, y_s)$, $(y_{s+1}, \ldots, y_{2s})$, $\ldots$, $(y_{\rho(s-1)+1}, \ldots, y_{\rho s})$ et les équations du groupe g seront

$$\left.\begin{array}{lll} Y_1 = a y_1, & \ldots, & Y_s = a y_s \\ Y_{s+1} = b y_{s+1}, & \ldots, & Y_{2s} = b y_{2s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots \\ Y_{\rho(s-1)+1} = l y_{\rho(s-1)+1}, & \ldots, & Y_{\rho s} = l y_{\rho s} \end{array}\right\} \quad q = \rho s.$$

Le faisceau d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_s$ vérifie une équation linéaire d'ordre s à coefficients algébriques, puisque $\frac{y'_1}{y_1}, \ldots, \frac{y'_s}{y_s}$ sont algébriques

$$\frac{d^s y}{dx^s} + \theta_1 \frac{d^{s-1} y}{dx^{s-1}} + \ldots + \theta_s y = 0. \tag{3}$$

Nous pouvons en calculer facilement les coefficients. En effet, en posant

$$\delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_s \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(s-1)} & y_2^{(s-1)} & \dots & y_s^{(s-1)} \end{vmatrix},$$

nous avons

$$-\theta_1 = \frac{\delta'}{\delta}.$$

Les substitutions du groupe de monodromie laissent donc θ_1 inaltéré si elles ne font qu'échanger $y_1, \dots, y_s$ entre elles ou avec leurs combinaisons linéaires; si, au contraire, elles permutent les faisceaux d'intégrales, θ_1 prend autant de valeurs qu'il y a de faisceaux. θ_1 *est une fonction algébrique à* ρ *déterminations.*

Mais δ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre C_q^s à coefficients rationnels qu'il est facile de former à partir de l'équation (2). Nous aurons à rechercher si cette équation admet une intégrale dont la dérivée logarithmique soit une fonction algébrique à ρ déterminations.

La fonction θ_1 étant obtenue, des différentiations et des résolutions d'équations du premier degré nous donneront $\theta_2, \dots, \theta_s$. Nous formons ainsi l'équation (3).

Le sous-groupe continu maximum de son groupe de rationalité est

$$Y_1 = a y_1, \quad \dots, \quad Y_s = a y_s.$$

Faisons la transformation

$$y = e^{-\frac{1}{s}\int \theta_1 dx} z. \tag{4}$$

L'équation en z obtenue sera privée de terme en $\frac{d^{s-1} z}{dx^{s-1}}$; le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité sera de la forme

$$Z_1 = a z_1, \quad Z_s = a z_s;$$

mais, comme il doit laisser invariable le déterminant

$$\begin{vmatrix} z_1 & \dots & z_s \\ z'_1 & \dots & z'_s \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(s-1)} & \dots & z_s^{(s-1)} \end{vmatrix},$$

il en résulte

$$a = 1.$$

L'intégrale générale de l'équation en z doit donc être algébrique.

Ce fait que l'intégrale est algébrique simplifie considérablement sa recherche. La méthode la plus rapide est celle donnée par M. Painlevé (*Comptes rendus*, 1887, 1888). La fonction $u = \frac{y'}{y}$ vérifie une équation algébrique; les travaux de M. Jordan font connaître une limite supérieure du degré de l'équation par rapport à u; la considération des équations déterminantes relatives aux points singuliers donne une limite supérieure du degré par rapport à x.

Tout ceci est considérablement simplifié dans le cas où $s = q$ (ce qui arrive nécessairement si q est premier), car l'équation (3) se confond avec l'équation (2). On fait alors immédiatement la transformation (4) et l'on cherche les intégrales algébriques de l'équation en z.

CHAPITRE VI.

LES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

1. *Classification des groupes linéaires homogènes continus à deux variables.* — Les équations d'un tel groupe G sont de la forme

$$Y_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2, \qquad Y_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2$$

et contiennent au plus quatre paramètres.

Supposons que y_1 et y_2 soient les coordonnées homogènes d'un point d'une droite. Les substitutions du groupe G effectuent sur les points de cette droite des transformations projectives formant un groupe continu Γ dont l'équation est

$$\frac{Y_1}{a_1 y_1 + b_1 y_2} = \frac{Y_2}{a_2 y_1 + b_2 y_2}.$$

Nous partagerons les groupes linéaires G en deux catégories, suivant que le groupe Γ est le groupe projectif général à trois paramètres de la droite

ou un de ses sous-groupes. Nous calculerons pour chaque catégorie un invariant différentiel caractéristique.

I. *Le groupe* Γ *est le groupe projectif général à trois paramètres de la droite.* — Nous pouvons écrire son équation sous la forme

$$\frac{Y_1}{\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2} = \frac{Y_2}{\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2}, \qquad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1.$$

Déterminons les divers groupes G correspondants.

Les transformations de ces groupes sont certainement de la forme

$$Y_1 = \rho(\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2),$$
$$Y_2 = \rho(\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2),$$

les quantités ρ, ρ', ρ'', ... relatives aux diverses transformations, vérifiant l'équation

$$\rho\rho' = \rho''.$$

Cette relation est tout d'abord vérifiée si toutes les quantités ρ sont égales à ± 1. On obtient alors le groupe linéaire homogène spécial

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 \\ Y_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1).$$

On peut aussi laisser varier ρ arbitrairement, et l'on a le groupe linéaire homogène général à quatre paramètres

$$Y_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2,$$
$$Y_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2.$$

Il n'y a pas d'autre groupe linéaire algébrique continu correspondant au groupe Γ. Car, si, pour une transformation particulière, $|\rho|$ a une valeur $\omega \neq 1$, il doit prendre nécessairement toutes les valeurs comprises entre 1 et ω et, par suite, les puissances de $|\rho|$ prennent des valeurs positives quelconques. Mais, comme les relations entre ρ, α_1, β_1, α_2, β_2 sont algébriques, il est impossible que ces relations donnent pour $|\rho|$ toutes les valeurs positives si elles ne font acquérir à ρ toutes les valeurs réelles ou imaginaires.

L'invariant le plus simple du groupe linéaire homogène spécial est la fonction

$$v = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Pour le groupe général, l'invariant est $\frac{v'}{v}$, qui est aussi un invariant du

groupe spécial. Cette fonction $\frac{v'}{v}$ sera donc l'invariant le plus simple attaché à la première catégorie de groupes linéaires.

II. *Le groupe* Γ *est un sous-groupe du groupe projectif.*

M. Lie a montré (*Theorie der Transformationsgruppen*, t. III, p. 17) que Γ laisse invariable un point de la droite. Nous pouvons prendre ce point pour origine de coordonnées ($y_1 = 0$), car cela revient à remplacer le groupe G par un groupe homologue.

Les équations du groupe Γ sont alors

$$\frac{Y_1}{\alpha_1 y_1} = \frac{Y_2}{\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2},$$

et celles du groupe G

$$Y_1 = a_1 y_1,$$
$$Y_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2,$$

a_1, a_2, b_2, n'étant indépendants que si le groupe G est à trois paramètres.

Tous ces groupes admettent l'invariant différentiel $\frac{y'_1}{y_1}$ que nous choisirons comme invariant caractéristique de la deuxième catégorie.

Le théorème suivant résume les résultats obtenus dans ce paragraphe :

Théorème. — *Les groupes continus linéaires homogènes à deux variables se partagent en deux catégories qui comprennent respectivement :*

I. *Le groupe linéaire homogène général et le groupe linéaire homogène spécial;* $V = \frac{v'}{v}$ *est l'invariant le plus simple, commun à ces deux groupes.*

II. *Les groupes dont les équations sont de la forme*

$$Y_1 = a_1 y_1, \qquad Y_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2;$$

$U = \frac{y'_1}{y_1}$ *est l'invariant caractéristique, commun à tous ces groupes.*

2. *Détermination du groupe de rationalité de l'équation*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0. \tag{1}$$

Nous supposons que p_1 et p_2 sont des fonctions rationnelles de x. Tout ce que nous dirons s'applique au cas où ce sont des fonctions algébriques.

Le groupe de rationalité de l'équation (1) ou tout au moins son groupe

continu maximum appartient à l'une des deux catégories obtenues plus haut. *Les équations du second ordre se partagent donc en deux catégories suivant la nature de leur groupe de rationalité.*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation appartienne à une catégorie donnée est que l'invariant caractéristique de cette catégorie soit rationnel ou algébrique, quand on y remplace y_1, y_2, par un système fondamental d'intégrales de l'équation (1) (Chap. V, n° 3). Examinons, séparément, les deux cas qui peuvent se présenter.

I. Pour toutes les équations (1), l'invariant $\frac{v'}{v}$ est rationnel, car

$$\frac{v'}{v} = \frac{y_1 y''_2 - y_2 y''_1}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} = -p_1.$$

Les équations de la première catégorie seront donc caractérisées par cette propriété négative qu'elles n'appartiennent pas à la deuxième catégorie. Nous verrons tout à l'heure comment l'on peut reconnaître s'il en est ainsi; supposons, pour le moment, le fait acquis.

Afin de poursuivre la détermination du groupe de rationalité, nous recherchons si ce groupe est le groupe linéaire général ou bien si son sous-groupe continu maximum est le groupe linéaire spécial. Dans ce dernier cas seulement, l'invariant v de ce groupe est une fonction algébrique de x; or v est donné par l'équation

$$v = e^{-\int p_1 dx}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que v soit algébrique est évidemment que la fonction p_1 n'ait, dans tout le plan, que des pôles simples avec des résidus commensurables.

Si cette condition n'est pas vérifiée, le groupe de rationalité de (1) est le groupe linéaire homogène général.

Si, au contraire, v est une fonction algébrique, le groupe de rationalité admet comme sous-groupe continu maximum le groupe linéaire homogène spécial; la forme de la fonction v permet ensuite de déterminer complètement le groupe de rationalité.

II. Les équations de la deuxième catégorie sont celles dont le groupe de rationalité ou son sous-groupe continu maximum appartiennent à la deuxième catégorie; pour ces équations, l'invariant $U = \frac{y'_1}{y_1}$ est rationnel ou algébrique.

Nous avons à reconnaître si l'équation (1) admet une intégrale dont la

dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique. C'est un problème que nous savons résoudre : la méthode exposée au Chapitre V, n° 4, nous conduit aux résultats suivants :

1° $\frac{y'}{y}$ *n'a qu'une seule détermination.* — On l'obtient en cherchant les intégrales de l'équation (1), dont la dérivée logarithmique est rationnelle. Au cas où cette recherche aboutit, nous avons

$$\frac{y'}{y} = r(x).$$

Toutes les intégrales de l'équation

$$z = y' - r(x)y = 0$$

appartiennent à l'équation (1), qui, par suite, peut s'écrire

$$\frac{dz}{dx} - r_1(x)z = 0,$$

$r_1(x)$ étant une fonction rationnelle (Schlesinger, *Handbuch der linearen Differentialgleichungen,* t. I, p. 45).

Nous calculerons d'abord par une quadrature la fonction z ; l'équation

$$y' - r(x)y = z$$

nous donnera ensuite par deux quadratures l'intégrale générale de l'équation (1).

La détermination complète du groupe de rationalité revient à l'étude de ces quadratures.

2° $\frac{y'}{y}$ *a deux déterminations.* — La fonction symétrique

$$\frac{y'_1}{y_1} + \frac{y'_2}{y_2} = \frac{d}{dx}\log y_1 y_2$$

est rationnelle.

Nous formons l'équation linéaire du troisième ordre qui admet pour intégrale $y_1 y_2$ et nous en cherchons les intégrales, dont la dérivée logarithmique est rationnelle. Lorsque cette recherche aboutit, il existe une expression de la forme

$$Y = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2,$$

dont la dérivée logarithmique est rationnelle.

Si $b^2 - ac$ était nul, Y serait le carré d'une intégrale de l'équation (1) et cette intégrale aurait sa dérivée logarithmique rationnelle; nous l'aurions reconnue directement.

Donc $b^2 - ac \neq 0$, et Y est le produit de deux intégrales distinctes de (1); on peut donc écrire

$$Y = y_1 y_2,$$

et l'on a

$$\frac{y'_1}{y_1} + \frac{y'_2}{y_2} = r_1(x).$$

Il est facile de calculer la fonction symétrique $\frac{y'_1}{y_1}\frac{y'_2}{y_2}$. En effet

$$\frac{y''_1}{y_1} - \frac{y'^2_1}{y^2_1} + \frac{y''_2}{y_2} - \frac{y'^2_2}{y^2_2} = r'_1(x),$$

et, en remplaçant y''_1 et y''_2 par leurs valeurs tirées de (1),

$$-p_1 r_1(x) - 2p_2 - \frac{y'^2_1}{y^2_1} - \frac{y'^2_2}{y^2_2} = r'_1(x),$$

ou

$$-p_1 r_1(x) - 2p_2 - r^2_1(x) + 2\frac{y'_1}{y_1}\frac{y'_2}{y_2} = r'_1(x).$$

Nous pouvons donc écrire l'équation algébrique donnant $U = \frac{y'}{y}$ en fonction de x

$$U^2 - r_1(x)U + r_2(x) = 0,$$

$\log y_1$ et $\log y_2$ sont donnés par les intégrales hyperelliptiques

$$\log y_1 = \int U_1\,dx, \qquad \log y_2 = \int U_2\,dx.$$

Le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité est de la forme

$$Y_1 = a_1 y_1, \qquad Y_2 = a_2 y_2.$$

L'étude des intégrales hyperelliptiques achèvera la détermination du groupe de rationalité.

3° $\frac{y'}{y}$ *a plus de deux déterminations.* — Nous avons vu alors, au Chapitre V, n° 4, que le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité est

$$Y_1 = a y_1, \qquad Y_2 = a y_2.$$

La transformation

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p_1\,dx} z$$

nous fait passer à l'équation

$$4z'' + (p_1^2 - 2p'_1 + 4p_2)\,z = 0,$$

dont toutes les intégrales doivent être algébriques. On reconnaîtra s'il en est ainsi par la méthode de M. Painlevé.

L'énoncé suivant résume les résultats obtenus dans ce paragraphe :

Théorème. — *Les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre se partagent en deux catégories caractérisées comme il suit :*

I. *Aucune intégrale n'a sa dérivée logarithmique algébrique.*

II. *La dérivée logarithmique d'une intégrale est une fonction algébrique à* N *déterminations; trois cas sont à distinguer :*

$N > 2$: *L'intégrale générale est le produit de l'exponentielle* $e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}$ *par une fonction algébrique.*

$N = 2$: *Les logarithmes de deux intégrales particulières s'expriment par des intégrales hyperelliptiques.*

$N = 1$: *Le logarithme d'une intégrale au moins s'exprime par une quadrature portant sur une fonction rationnelle. L'intégration s'achève par quadratures.*

La détermination complète du groupe de rationalité s'achève ou revient à l'étude de quadratures.

CHAPITRE VII.

ÉQUATIONS DU TROISIÈME ORDRE.

1. *Classification des groupes linéaires homogènes continus à trois variables.* — Les équations d'un tel groupe G sont de la forme

$$(G)\qquad \begin{cases} Y_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3, \\ Y_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3, \\ Y_3 = a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3 \end{cases}$$

et contiennent au plus neuf paramètres.

Supposons que y_1, y_2, y_3 soient les coordonnées homogènes d'un point d'un plan. Les substitutions du groupe G effectuent, sur les points de ce plan, des transformations projectives formant un groupe continu Γ, dont les équations sont

$$(\Gamma) \qquad \frac{Y_1}{a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3} = \frac{Y_2}{a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3} = \frac{Y_3}{a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3}.$$

Nous allons classer ces groupes d'après les figures géométriques qu'ils laissent invariables, et nous rangerons les groupes linéaires de la même façon que les groupes projectifs qui leur correspondent.

D'après un théorème de M. Lie (*Th. der Transformationsgruppen*, t. III, p. 94), un groupe continu projectif du plan, qui n'est pas le groupe projectif général, laisse invariable ou un point ou une droite, ou bien c'est le groupe à trois paramètres d'une conique non décomposable.

Nous avons donc quatre catégories de groupes linéaires; nous allons déterminer, pour chacune d'elles, la forme des groupes qui y sont contenus et un invariant différentiel caractéristique.

I. *Le groupe Γ est le groupe projectif général à huit paramètres du plan.* — Ses équations peuvent s'écrire

$$\frac{Y_1}{\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3} = \frac{Y_2}{\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3} = \frac{Y_3}{\alpha_3 y_1 + \beta_3 y_2 + \gamma_3 y_3}$$

avec

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

On reconnaît, comme au Chapitre précédent, qu'il y a deux groupes linéaires correspondant à ce groupe :

Le groupe linéaire homogène spécial à huit paramètres

$$Y_i = \alpha_i y_1 + \beta_i y_2 + \gamma_i y_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\Delta = 1;$$

Le groupe linéaire homogène général à neuf paramètres

$$Y_i = a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

L'invariant le plus simple du groupe spécial est

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix}.$$

Pour le groupe général, l'invariant est $\frac{w'}{w}$, qui appartient aussi au groupe spécial.

La fonction $W = \frac{w'}{w}$ sera donc l'invariant le plus simple attaché à la première catégorie de groupes linéaires.

II. *Le groupe* Γ *laisse une droite invariable.* — Nous pouvons supposer qu'elle est le côté $y_1 = 0$ du triangle de référence.

Les équations du groupe G sont alors de la forme

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1, \\ Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3, \\ Y_3 &= a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3, \end{aligned}$$

les paramètres a, b, c n'étant indépendants que si le groupe G est à sept paramètres.

Tous ces groupes admettent l'invariant différentiel $U = \frac{y_1'}{y_1}$, que nous choisirons comme invariant caractéristique de la deuxième catégorie.

III. *Le groupe* Γ *laisse un point invariable.* — Nous pouvons supposer que c'est le sommet $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ du triangle de référence.

Les équations du groupe G sont alors de la forme

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1 + b_1 y_2, \\ Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2, \\ Y_3 &= a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3, \end{aligned}$$

les paramètres a, b, c n'étant indépendants que si le groupe G est à sept paramètres.

Nous poserons

$$v = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Tous les groupes de la troisième catégorie admettent l'invariant différentiel $V = \frac{v'}{v}$, qui en est l'invariant caractéristique.

IV. *Le groupe* Γ *est le groupe projectif à trois paramètres d'une conique non décomposable,* dont nous pouvons supposer l'équation ramenée à la forme

$$\theta = y_2^2 - y_1 y_3 = 0.$$

On voit facilement que cette catégorie comprend deux groupes :

Un groupe à trois paramètres formé des transformations linéaires dont le déterminant est égal à 1, qui laissent inaltérée la fonction θ.

Un groupe à quatre paramètres formé des transformations linéaires qui multiplient θ par un facteur constant quelconque.

Ces deux groupes admettent donc l'invariant différentiel $\Theta = \frac{\theta'}{\theta}$, qui est l'invariant caractéristique de la quatrième catégorie.

L'énoncé suivant résume les résultats acquis dans ce paragraphe :

Théorème. — *Les groupes continus linéaires homogènes à trois variables se partagent en quatre catégories qui comprennent respectivement :*

I. *Le groupe linéaire général et le groupe linéaire spécial;* $W = \frac{w'}{w}$ *est l'invariant le plus simple commun à ces deux groupes.*

II. *Les groupes qui laissent invariable l'équation* $y_1 = 0$; *l'invariant caractéristique est* $U = \frac{y'_1}{y_1}$.

III. *Les groupes qui laissent invariables le système d'équations* $y_1 = 0, y_2 = 0$; *l'invariant caractéristique est* $V = \frac{v'}{v}$.

IV. *Les groupes qui laissent invariable l'équation* $\theta = 0$; *l'invariant caractéristique est* $\Theta = \frac{\theta'}{\theta}$.

Un même groupe peut d'ailleurs appartenir à plusieurs catégories.

2. *Détermination du groupe de rationalité de l'équation*

$$\frac{d^3y}{dx^3} + p_1\frac{d^2y}{dx^2} + p_2\frac{dy}{dx} + p_3y = 0. \tag{1}$$

Les coefficients p_1, p_2, p_3 sont rationnels (ou algébriques).

Le groupe de rationalité, ou tout au moins son sous-groupe continu maximum, appartient à l'une des quatre catégories obtenues plus haut. *Les équations du troisième ordre se partagent donc en quatre catégories suivant la nature de leur groupe de rationalité.*

Pour décider à quelle catégorie appartient l'équation (1), il faut rechercher si les invariants donnés plus haut sont rationnels ou algébriques quand on remplace y_1, y_2, y_3 par un système fondamental d'intégrales de cette équation.

Mais les quantités u, v, w, θ vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qu'il est aisé de former; nous aurons à recon-

naître si ces équations ont des intégrales dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique (Chap. V, n° 4).

Nous allons parcourir les diverses catégories et approfondir la solution du problème en étudiant ce qui est particulier à chacune d'elles.

I. Pour toutes les équations (1), l'invariant $\frac{w'}{w}$ est rationnel, car

$$\frac{w'}{w} = -p_1.$$

Les équations de la première catégorie sont donc caractérisées par cette propriété négative qu'elles n'appartiennent à aucune des trois autres catégories. Nous verrons tout à l'heure comment on peut reconnaître s'il en est ainsi ; supposons pour le moment le fait acquis.

Nous rechercherons, comme au n° 2 du Chapitre précédent, si le groupe de rationalité est le groupe linéaire général ou si son sous-groupe continu maximum est le groupe linéaire spécial.

II. Les équations de la deuxième catégorie sont celles dont le groupe de rationalité ou son sous-groupe continu maximum appartiennent à la deuxième catégorie ; pour ces équations, l'invariant $U = \frac{y_1'}{y_1}$ est rationnel ou algébrique.

Nous rechercherons donc, par la méthode exposée au Chap. V, n° 4, si l'équation (1) admet des intégrales dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique. Il peut se présenter les cas suivants :

1° $\frac{y'}{y}$ *n'a qu'une seule détermination.* Soit

$$\frac{y'}{y} = r(x).$$

Toutes les intégrales de l'équation

$$z = y' - r(x)y = 0$$

appartiennent à l'équation (1) qui, par suite, peut s'écrire

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + q_1 \frac{dz}{dx} + q_2 z = 0,$$

q_1 et q_2 étant des fonctions rationnelles.

Nous rechercherons, comme il a été dit au Chap. VI, le groupe de ratio-

nalité de cette équation; lorsqu'il sera déterminé, nous en déduirons le groupe de rationalité de l'équation (1).

2° $\frac{y'}{y}$ *a deux déterminations.* Le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité a pour équations

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1, \\ Y_2 &= a_2 y_2, \\ Y_3 &= a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3, \end{aligned}$$

y_1 et y_2 sont deux intégrales indépendantes de l'équation à coefficients rationnels

$$t = y'' + r_1(x) y' + r_2(x) = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) peut donc s'écrire

$$\frac{dt}{dx} + r_3(x) t = 0.$$

La fonction t se calculera par une quadrature; l'équation à second membre (2) que nous savons intégrer lorsque $t = 0$ nous donnera ensuite, par des quadratures, l'intégrale générale de l'équation (1).

La détermination complète du groupe de rationalité revient à l'étude de ces quadratures.

3° $\frac{y'}{y}$ *a trois déterminations relatives à trois intégrales linéairement indépendantes.* Les équations du sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité sont

$$Y_1 = a_1 y_1, \qquad Y_2 = a_2 y_2, \qquad Y_3 = a_3 y_3.$$

Les diverses déterminations de la fonction $\log y$ sont données par des intégrales abéliennes attachées à la courbe

$$U^3 + r_1(x) U^2 + r_2(x) U + r_3(x) = 0,$$
$$\log y = \int U \, dx.$$

4° $\frac{y'}{y}$ *a plus de trois déterminations.* Les équations du sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité sont

$$Y_1 = a y_1, \qquad Y_2 = a y_2, \qquad Y_3 = a y_3.$$

L'intégrale générale est le produit de l'exponentielle $e^{-\frac{1}{3}\int p_1 dx}$ par une fonction algébrique.

III. Les équations de la troisième catégorie sont celles dont le groupe de rationalité ou son sous-groupe continu maximum appartiennent à la troisième catégorie; pour ces équations, l'invariant $V = \frac{v'}{v}$ est rationnel ou algébrique.

Il est avantageux de remplacer l'invariant V par l'invariant

$$V + p_1 = \frac{v'}{v} - \frac{w'}{w} = \frac{d}{dx} \log \frac{v}{w}.$$

La fonction $\eta = \frac{v}{w}$ vérifie l'équation adjointe de l'équation (1)

$$(3) \qquad \frac{d^3 \eta}{dx^3} - \frac{d^2 p_1 \eta}{dx^2} + \frac{d p_2 \eta}{dx} - p_3 \eta = 0.$$

Nous recherchons si cette équation a des intégrales dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique. La discussion est la même que celle que nous venons de faire pour les équations de la deuxième catégorie; elle nous conduit à la détermination du groupe de rationalité de l'équation (3). Le groupe de rationalité de l'équation (1) est le groupe dualistique du groupe ainsi trouvé (Vessiot).

IV. Le groupe de rationalité des équations de la quatrième catégorie contient le groupe linéaire homogène continu à trois paramètres qui laisse invariable la fonction

$$\theta = y_2^2 - y_1 y_3.$$

Pour ces équations, l'invariant $\Theta = \frac{\theta'}{\theta}$ est rationnel ou algébrique.

La fonction θ vérifie une équation linéaire à coefficients rationnels du sixième ordre que l'on obtient comme il suit. On pose

$$\theta = y^2$$

et l'on différentie six fois cette équation en remplaçant, lorsqu'il y a lieu, $\frac{d^3 y}{dx^3}$ par sa valeur tirée de (1); l'élimination des six quantités

$$\frac{d^i y}{dx^i} \frac{d^j y}{dx^j} \qquad (i, j = 0, 1, 2)$$

nous conduit à l'équation cherchée, dont l'intégrale est la forme quadratique générale aux variables y_1, y_2, y_3.

On calculera les intégrales de cette équation dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique.

S'il existe une telle intégrale, elle s'exprime certainement par une forme quadratique en y_1, y_2, y_3, dont le discriminant est différent de zéro; sinon l'équation (1) appartiendrait à la classe II ou à la classe III et nous l'aurions déjà reconnu.

De plus, la fonction $\frac{\theta'}{\theta}$ est rationnelle; car si elle avait deux déterminations $\frac{\theta'_1}{\theta_1}$ et $\frac{\theta'_2}{\theta_2}$, le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité laisserait invariable chacune des deux coniques :

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0,$$

et, par suite, leurs points d'intersection. L'équation appartiendrait donc à la classe III.

Supposons donc que l'on ait obtenu

$$(4) \qquad \Theta = \frac{\theta'}{\theta} = r(x).$$

Si la fonction θ, définie par cette équation, est algébrique, le groupe de rationalité admet comme sous-groupe continu maximum le groupe à trois paramètres qui laisse θ inaltéré. La nature de la fonction algébrique θ permet d'achever la détermination du groupe de rationalité.

Si θ n'est pas algébrique, le groupe de rationalité est le groupe à quatre paramètres qui laisse invariable l'équation $\theta = 0$.

Quel profit peut-on tirer de l'équation (4) pour simplifier l'intégration de l'équation (1)?

Nous transformerons d'abord l'équation (1) en une équation analogue pour laquelle la relation entre les intégrales sera

$$\theta = 0.$$

Pour définir la transformation employée, nous nous servirons du mode de représentation des systèmes fondamentaux d'intégrales adopté par Halphen. Nous ferons correspondre à chaque système de valeurs y_1, y_2, y_3 le point du plan dont les coordonnées homogènes sont y_1, y_2, y_3. Lorsque x varie, ce point se déplace sur une courbe C, qui représente le système fondamental y_1, y_2, y_3.

Considérons la courbe C relative à un système fondamental vérifiant

l'équation (4). La tangente à la courbe C en un de ses points M coupe la conique $\theta = 0$ en deux points m, dont il est facile de trouver les coordonnées $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$. Nous avons, en effet, puisque m est sur la tangente,

$$\begin{aligned} \overline{y}_1 &= \alpha y_1 + \beta y'_1, \\ \overline{y}_2 &= \alpha y_2 + \beta y'_2, \\ \overline{y}_3 &= \alpha y_3 + \beta y'_3, \end{aligned}$$

et, puisqu'il est sur la conique $\theta = 0$,

$$(\alpha y_2 + \beta y'_2)^2 - (\alpha y_1 + \beta y'_1)(\alpha y_3 + \beta y'_3) = 0,$$
$$\alpha^2(y_2^2 - y_1 y_3) + \alpha\beta(2 y_2 y'_2 - y_1 y'_3 - y_3 y'_1) + \beta^2(y'^2_2 - y'_1 y'_3) = 0.$$

Les équations (1) et (4) permettent de calculer facilement, par des différentiations et des résolutions d'équations du premier degré, des quantités proportionnelles aux expressions

$$y_2^2 - y_1 y_3, \quad 2 y_2 y'_2 - y_1 y'_3 - y_3 y'_1, \quad y'^2_2 - y'_1 y'_3.$$

On trouve ainsi que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est donné par l'équation à coefficients rationnels

$$\alpha^2 + r(x)\alpha\beta + s(x)\beta^2 = 0.$$

Les deux valeurs de ce rapport correspondent aux deux points d'intersection de la tangente en M et de la conique.

Si nous faisons maintenant sur l'équation (1) la transformation

$$\overline{y} = \alpha y + \beta y', \tag{5}$$

on obtient une nouvelle équation

$$\frac{d^3\overline{y}}{dx^3} + \overline{p}_1 \frac{d^2\overline{y}}{dx^2} + \overline{p}_2 \frac{d\overline{y}}{dx} + \overline{p}_3 \overline{y} = 0, \tag{6}$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, α et β et pour laquelle il existe un système d'intégrales fondamentales vérifiant la relation

$$\overline{y}_2^2 - \overline{y}_1 \overline{y}_3 = 0.$$

M. Goursat (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XI) a donné une méthode très élégante qui ramène l'intégration de l'équation (6) à celle d'une équation du second ordre.

Je me bornerai à énoncer le résultat :

Les intégrales de l'équation (6) *sont les carrés des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels en* x, α, β.

Il résulte alors de l'équation (5) que :

Les intégrales de l'équation (1) *s'expriment en fonction de l'intégrale générale* z *de cette équation du second ordre par une formule de la forme*

$$y = \mathrm{A}z^2 + \mathrm{B}z\frac{dz}{dx},$$

A *et* B *étant des fonctions rationnelles de* x, α *et* β.

L'énoncé suivant résume les résultats obtenus dans ce paragraphe.

Théorème. — *Les équations différentielles linéaires homogènes du troisième ordre se partagent en quatre catégories caractérisées comme il suit :*

I. *Cette catégorie comprend les équations les plus générales et celles pour lesquelles* w *est une fonction algébrique.*

II. *La dérivée logarithmique d'une intégrale est une fonction algébrique.*

III. *La dérivée logarithmique de la fonction* v *ou bien encore d'une intégrale de l'équation adjointe est algébrique.*

IV. *La dérivée logarithmique d'une forme quadratique non décomposable des intégrales est rationnelle.*

Dans tous ces cas, la détermination effective du groupe de rationalité exige au plus l'étude de quadratures.

CHAPITRE VIII.

ÉQUATIONS DU QUATRIÈME ORDRE.

1. *Classification des groupes linéaires homogènes continus à quatre variables.* — Les équations d'un tel groupe G sont de la forme

$$\mathrm{Y}_i = a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 + d_i y_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

et contiennent au plus seize paramètres.

Supposons que y_1, y_2, y_3, y_4 soient les coordonnées homogènes d'un point de l'espace à trois dimensions. Les substitutions du groupe G effectuent sur les points de l'espace des transformations projectives formant un groupe continu Γ, dont les équations sont

$$\frac{Y_1}{a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3 + d_1 y_4} = \frac{Y_2}{a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 + d_2 y_4} = \ldots$$

Nous allons classer ces groupes, d'après les figures géométriques qu'ils laissent invariables et nous rangerons les groupes linéaires de la même façon que les groupes projectifs qui leur correspondent.

M. Lie a déterminé tous les groupes projectifs de l'espace ordinaire et il suffit de rassembler divers résultats qu'il a donnés (*Theorie der Transformationsgruppen*, t. III, p. 226, 235 et 236) pour reconnaître que les hypothèses suivantes sont seules à envisager :

I. Γ est le groupe projectif général de l'espace à trois dimensions, sinon il laisse invariable l'une au moins des figures suivantes :

II. Un plan;

III. Une droite;

IV. Un point.

Ou bien encore Γ est l'un ou l'autre des groupes suivants :

V. Le groupe projectif à six paramètres d'une surface du second degré non dégénérée.

VI. Le groupe projectif à dix paramètres d'un complexe linéaire non dégénéré.

VII. Le groupe projectif à trois paramètres d'une cubique gauche.

Nous avons donc sept catégories de groupes linéaires; nous allons déterminer pour chacune d'elles la forme des groupes qui y sont contenus et un invariant différentiel caractéristique.

I. *Le groupe* Γ *est le groupe projectif général à quinze paramètres de l'espace.* — On reconnaît alors, comme aux Chapitres précédents, qu'il y a deux groupes linéaires correspondant à ce groupe :

Le groupe linéaire homogène spécial à quinze paramètres formé de toutes les transformations linéaires dont le déterminant est égal à 1;

Le groupe linéaire homogène général à seize paramètres comprenant toutes les transformations linéaires.

L'invariant le plus simple du groupe spécial est

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 & y''_4 \\ y'''_1 & y'''_2 & y'''_3 & y'''_4 \end{vmatrix}.$$

Pour le groupe général, l'invariant le plus simple est $\frac{\Delta'}{\Delta}$.

La fonction $\frac{\Delta'}{\Delta}$ est donc l'invariant le plus simple commun aux groupes de la première catégorie.

II. *Le groupe* Γ *laisse un plan invariable.* — Nous pouvons supposer que c'est la face $y_1 = 0$ du tétraèdre de référence.

Les équations du groupe G sont alors de la forme

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1, \\ Y_i &= a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 + d_i y_4 \end{aligned}\right\} \quad (i = 2, 3, 4).$$

La fonction $U = \frac{y'_1}{y_1}$ est l'invariant caractéristique appartenant aux groupes de la deuxième catégorie.

III. *Le groupe* Γ *laisse une droite invariable.* — Nous pouvons supposer que c'est l'arête $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ du tétraèdre de référence.

Les équations du groupe G sont alors de la forme

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1 + b_1 y_2 \\ Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2 \\ Y_i &= a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 + d_i y_4 \end{aligned}\right\} \quad (i = 3, 4).$$

La fonction

$$V = \frac{v'}{v}, \qquad v = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

est l'invariant différentiel caractéristique des groupes de la troisième catégorie.

IV. *Le groupe* Γ *laisse un point invariable.* — Nous pouvons supposer que c'est le sommet $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ du tétraèdre de référence.

Les équations du groupe G sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} Y_i &= a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 \\ Y_4 &= a_4 y_1 + b_4 y_2 + c_4 y_3 + d_4 y_4 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3).$$

La fonction $W = \frac{w'}{w}$, où

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix}$$

est l'invariant différentiel caractéristique des groupes de la quatrième catégorie.

V. Γ *est le groupe projectif à six paramètres d'une surface du second degré non dégénérée* dont nous pouvons supposer l'équation ramenée à la forme

$$\theta = y_1 y_4 - y_2 y_3 = 0.$$

Cette catégorie comprend deux groupes :

Un groupe à six paramètres formé des transformations linéaires dont le déterminant est égal à 1, qui laissent inaltérée la fonction θ;

Un groupe à sept paramètres formé des transformations linéaires qui multiplient θ par un facteur constant quelconque.

Ces deux groupes admettent donc l'invariant différentiel $\Theta = \frac{\theta'}{\theta}$, qui est l'invariant caractéristique de la cinquième catégorie.

VI. Γ *est le groupe projectif à dix paramètres d'un complexe linéaire non dégénéré.*

Pour ce qui suit, il nous sera avantageux de supposer que ce complexe linéaire est celui qui est attaché à la cubique gauche

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}$$

et qui peut être défini de la façon suivante :

Les coordonnées d'un point de la cubique s'expriment en fonction d'un paramètre par les formules

$$y_1 = t^3, \qquad y_2 = t^2, \qquad y_3 = t, \qquad y_4 = 1.$$

L'équation du plan osculateur à la cubique au point $t(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sera donc

$$Y_1 - 3t Y_2 + 3t^2 Y_3 - t^3 Y_4 = 0$$

ou

$$Y_1 y_4 - 3 Y_2 y_3 + 3 Y_3 y_2 - Y_4 y_1 = 0.$$

Les points de contact des plans osculateurs à la cubique menés par un

point $M(z_1, z_2, z_3, z_4)$ de l'espace ont leurs coordonnées t définies par l'équation

$$z_1 - 3tz_2 + 3t^2 z_3 - t^3 z_4 = 0,$$

ou bien encore ces points sont dans le plan

$$(\alpha) \qquad z_1 y_4 - 3z_2 y_3 + 3z_3 y_2 - z_4 y_1 = 0.$$

Ces points, au nombre de trois, sont situés dans un plan P passant par le point M.

La cubique nous permet donc de définir une correspondance entre les points M et les plans P de l'espace qui est précisément la correspondance définie par le complexe linéaire formé par les droites joignant les deux points (y_1, y_2, y_3, y_4) et (z_1, z_2, z_3, z_4) dont les coordonnées vérifient l'équation (α).

L'équation (α) définit le complexe linéaire attaché à la cubique. On en déduit immédiatement l'équation différentielle des courbes dont les tangentes appartiennent à ce complexe :

$$\omega = y_1 y'_4 - y_4 y'_1 - 3(y_2 y'_3 - y_3 y'_2) = 0.$$

La sixième catégorie comprend deux groupes :

Un groupe à dix paramètres formé des transformations linéaires dont le déterminant est égal à 1, qui laissent inaltérée la fonction ω;

Un groupe à onze paramètres formé des transformations linéaires qui laissent inaltérée l'équation $\omega = 0$.

La fonction $\Omega = \frac{\omega'}{\omega}$ est l'invariant différentiel caractéristique de cette catégorie.

VII. Γ *est le groupe projectif à trois paramètres de la cubique gauche*

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}.$$

Ce groupe laisse donc invariable le complexe linéaire dont nous venons de trouver l'équation. Les groupes linéaires correspondants admettent donc l'équation invariante $\omega = 0$ et possèdent l'invariant différentiel

$$\Omega = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Ils laissent aussi invariable la développable formée par les tangentes à la

cubique gauche et dont l'équation est

$$\sigma = (y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_2^2 - y_1 y_3)(y_3^2 - y_2 y_4) = 0.$$

Ils admettent donc le nouvel invariant

$$\Sigma = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

Nous allons déterminer les équations des groupes G qui correspondent au groupe Γ.

Les coordonnées d'un point de la cubique gauche s'expriment en fonctions homogènes de deux paramètres λ_1 et λ_2 par les formules

$$y_1 = \lambda_1^3, \qquad y_2 = \lambda_1^2 \lambda_2, \qquad y_3 = \lambda_1 \lambda_2^2, \qquad y_4 = \lambda_2^3.$$

Si l'on suppose que λ_1 et λ_2 sont les coordonnées homogènes d'un point d'une droite, ces formules établissent une correspondance biuniforme entre les points M de la cubique et les points m de la droite.

Les transformations projectives de l'espace qui reproduisent la cubique correspondent aux transformations projectives de la droite et réciproquement.

En effet, une transformation projective de l'espace qui reproduit la cubique fait correspondre à un point M_1 un seul point M_2. On obtient donc sur la droite une transformation qui fait correspondre au point m_1 le seul point m_2; c'est une transformation projective.

Réciproquement, une transformation projective de la droite fait correspondre à un point m_1 le seul point m_2; elle donne donc sur la cubique une transformation qui fait correspondre au point M_1 le seul point M_2. Nous obtenons ainsi une transformation qui n'est définie que pour les points de la cubique; il est facile de la définir pour tout l'espace.

Pour cela, nous ferons correspondre au plan qui coupe la cubique aux trois points M_1, N_1, P_1 le plan qui la coupe aux trois points transformés M_2, N_2, P_2. La correspondance ainsi définie entre les plans de l'espace est biuniforme; c'est donc une transformation projective qui laisse la cubique invariable. Le théorème que nous avions en vue est donc démontré.

Il nous est maintenant facile de trouver les équations des groupes projectifs qui laissent la cubique invariable.

Les transformations projectives de la droite s'écrivent

$$(\beta) \qquad \Lambda_1 = a\lambda_1 + b\lambda_2 \qquad \Lambda_2 = c\lambda_1 + d\lambda_2.$$

Les transformations correspondantes de l'espace qui changent le point

$$y_1 = \lambda_1^3, \quad y_2 = \lambda_1^2\lambda_2, \quad y_3 = \lambda_1\lambda_2^2, \quad y_4 = \lambda_2^3$$

en le point

$$Y_1 = \Lambda_1^3, \quad Y_2 = \Lambda_1^2\Lambda_2, \quad Y_3 = \Lambda_1\Lambda_2^2, \quad Y_4 = \Lambda_2^3$$

s'exprimeront donc par les formules suivantes :

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned} Y_1 &= a^3 y_1 + 3a^2 b y_2 + 3ab^2 y_3 + b^3 y_4,\\ Y_2 &= a^2 c y_1 + (2abc + a^2 d) y_2 + (b^2 c + 2abd) y_3 + b^2 d y_4,\\ Y_3 &= ac^2 y_1 + (2acd + c^2 b) y_2 + (ad^2 + 2bcd) y_3 + bd^2 y_4,\\ Y_4 &= c^3 y_1 + 3c^2 d y_2 + 3cd^2 y_3 + d^3 y_4. \end{aligned}\right.$$

Puisque les transformations (β) définissent le groupe projectif à trois paramètres de la droite, deux hypothèses seulement sont acceptables :

1° a, b, c, d sont indépendants. Les équations (γ) définissent un groupe linéaire à quatre paramètres.

2° a, b, c, d sont liés par la seule relation $ad - bc = 1$. Les équations (γ) définissent un groupe linéaire à trois paramètres.

Ce sont les deux seuls groupes linéaires homogènes qui appartiennent à la septième catégorie. Leurs invariants caractéristiques sont

$$\Omega = \frac{\omega'}{\omega}, \qquad \Sigma = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

L'énoncé suivant résume une partie des résultats acquis dans ce paragraphe :

Théorème. — *Les groupes continus linéaires homogènes à quatre variables se partagent en sept catégories qui comprennent respectivement :*

I. *Le groupe linéaire général et le groupe linéaire spécial;* $\frac{\Delta'}{\Delta}$ *est l'invariant le plus simple commun à ces deux groupes;*

II. *Les groupes qui laissent invariante l'équation* $y_1 = 0$; *l'invariant caractéristique est* $U = \frac{y_1'}{y_1}$;

III. *Les groupes qui laissent invariant le système d'équations* $y_1 = 0$, $y_2 = 0$; *l'invariant caractéristique est* $V = \frac{v'}{v}$;

IV. *Les groupes qui laissent invariant le système d'équations* $y_1 = 0$, $y_2 = 0, y_3 = 0$; *l'invariant caractéristique est* $W = \frac{w'}{w}$;

V. *Les deux groupes qui laissent invariante l'équation* $\theta = 0$ *et dont l'invariant commun est* $\Theta = \frac{\theta'}{\theta}$;

VI. *Les deux groupes qui laissent invariante l'équation* $\omega = 0$ *et dont l'invariant commun est* $\Omega = \frac{\omega'}{\omega}$;

VII. *Les deux groupes qui laissent la cubique gauche invariable et dont les invariants communs sont* $\Omega = \frac{\omega'}{\omega}$ *et* $\Sigma = \frac{\sigma'}{\sigma}$.

2. *Détermination du groupe de rationalité de l'équation*

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + p_1 \frac{d^3 y}{dx^3} + p_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + p_3 \frac{dy}{dx} + p_4 y = 0. \tag{1}$$

Les coefficients p_1, p_2, p_3, p_4 sont rationnels (ou algébriques).

Le groupe de rationalité ou tout au moins son sous-groupe continu maximum appartient à l'une des sept catégories énumérées plus haut. *Les équations du quatrième ordre se partagent donc en sept catégories suivant la nature de leur groupe de rationalité.*

Pour décider à quelle catégorie appartient l'équation (1), il faut rechercher si les invariants que nous avons donnés sont rationnels ou algébriques, quand on remplace y_1, y_2, y_3, y_4 par un système fondamental d'intégrales de cette équation.

Mais les quantités $u, v, w, \theta, \omega, \sigma$ vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qu'il est aisé de former; nous aurons à reconnaître si ces équations ont des intégrales dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique.

Nous allons parcourir les diverses catégories et approfondir la solution du problème en indiquant ce qui est particulier à chacune d'elles.

I. Pour toutes les équations (1), l'invariant $\frac{\Delta'}{\Delta}$ est rationnel, car

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = -p_1.$$

Les équations de la première catégorie sont donc caractérisées par cette propriété négative qu'elles n'appartiennent à aucune des six autres catégories. C'est donc lorsque les recherches que nous allons indiquer auront échoué que l'on saura que l'équation est de la première catégorie.

Nous rechercherons alors, comme au n° 2 du Chap. VI, si le groupe de

rationalité est le groupe linéaire homogène général ou si son sous-groupe continu maximum est le groupe spécial.

II. Les équations de la deuxième catégorie sont caractérisées par ce fait que l'invariant $U = \frac{y'_1}{y_1}$ est rationnel ou algébrique.

Nous calculerons donc, par la méthode exposée au Chap. V, n° 4, les intégrales de l'équation (1) dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique. La détermination du groupe de rationalité s'achèvera ensuite comme il a été indiqué pour les équations du troisième ordre (Chap. VII, n° 2).

IV. Pour les équations de la quatrième catégorie, l'invariant $W = \frac{w'}{w}$ est rationnel ou algébrique.

On verra, comme au Chapitre précédent, que l'adjointe de Lagrange de l'équation (1) admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique. On déterminera le groupe de rationalité de cette adjointe qui rentre dans la catégorie II; le groupe de rationalité de l'équation (1) est le groupe dualistique du groupe ainsi trouvé.

III et VI. L'équation (1) appartiendra à l'une ou à l'autre de ces deux catégories suivant que l'un ou l'autre des invariants

$$V = \frac{v'}{v}, \qquad \Omega = \frac{\omega'}{\omega}$$

est rationnel ou algébrique.

Mais les fonctions v et ω vérifient une même équation différentielle linéaire du sixième ordre que l'on peut former comme il suit. Posons

$$v = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

et différentions cette équation en remplaçant toutes les fois qu'il y a lieu y_1^{IV} et y_2^{IV} par leurs valeurs déduites de l'équation (1). On obtient ainsi les expressions de v et de ses six premières dérivées en fonctions linéaires des six déterminants que l'on peut former dans la matrice

$$\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & y''_1 & y'''_1 \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & y'''_2 \end{vmatrix}.$$

L'élimination de ces six déterminants conduit à une équation linéaire, à coefficients rationnels, du sixième ordre, dont l'intégrale générale est

$$\varepsilon = \sum a_{ik}(y_i y'_k - y_k y'_i).$$

Nous rechercherons les intégrales de cette équation dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique.

1° Une intégrale ε est telle que

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \text{fonct. rationn. de } x = r_1(x);$$

$\varepsilon = 0$ est l'équation différentielle des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Deux cas sont à distinguer.

a. Ce complexe se compose des droites qui coupent une droite fixe que nous pouvons supposer être la droite

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0.$$

L'équation du complexe est alors

$$\varepsilon = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = 0.$$

Pour reconnaître si nous nous trouvons dans ce cas, il faut chercher s'il existe des intégrales y_1, y_2 de l'équation (1) telle que

$$y_1 y''_2 - y_2 y''_1 = r_1(x)(y_1 y'_2 - y_2 y'_1).$$

Des différentiations et des éliminations permettent de voir s'il en est ainsi et dans le cas favorable on trouve

$$y'_1 y''_2 - y'_2 y''_1 = r_2(x)(y_1 y'_2 - y_2 y'_1).$$

L'équation (1) appartient donc à la troisième catégorie. De plus elle est réductible et les intégrales y_1, y_2 vérifient l'équation du second ordre

$$z = \frac{d^2 y}{dx^2} - r_1(x)\frac{dy}{dx} + r_2(x) y = 0.$$

L'équation (1) peut donc s'écrire

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + q_1(x)\frac{dz}{dx} + q_2(x) z = 0,$$

q_1 et q_2 désignant deux fonctions rationnelles. On recherchera le groupe de rationalité de cette équation et l'on en conclura celui de l'équation (1).

b. Le complexe $\varepsilon = 0$ est un complexe général; on peut alors écrire son équation

$$\omega = 0.$$

Si aucun autre invariant U, V, W, Θ, Σ, n'est rationnel ou algébrique, l'équation (1) appartient à la sixième catégorie et son groupe de rationalité a dix ou onze paramètres.

On peut employer la relation

$$\frac{\omega'}{\omega} = r_1(x),$$

pour réduire l'équation (1) à une équation non linéaire du troisième ordre; on ne peut la ramener à une équation du second ordre.

2° Une intégrale ε est telle que $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ est une fonction algébrique à deux déterminations $\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_1}$ et $\frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_2}$.

Le sous-groupe continu maximum Γ du groupe de rationalité laisse invariables les deux complexes

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = 0,$$

et, par suite, la congruence qui est leur intersection. Les deux directrices de cette congruence sont distinctes, sans quoi nous aurions trouvé

$$\frac{v'}{v} = r_1(x).$$

Si ces deux directrices se coupent en un point A et sont situées dans un plan P, le groupe Γ laisse invariables le point A et le plan P; l'équation (1) appartient à la fois aux catégories II et IV et nous l'avons déjà reconnu.

Le seul cas nouveau qui puisse se présenter est donc celui où les deux directrices de la congruence ne se coupent pas; nous pouvons supposer que ce sont les arêtes

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad \text{et} \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0,$$

du tétraèdre de référence.

Le groupe Γ laisse invariables ces deux droites et s'écrit

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1 + b_1 y_2, \\ Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2, \\ Y_3 &= c_3 y_3 + d_3 y_4, \\ Y_4 &= c_4 y_3 + d_4 y_4. \end{aligned}$$

Les intégrales y_1, y_2, y_3, y_4 vérifient une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + s_1(x)\frac{dy}{dx} + s_2(x) y = 0,$$

dont les coefficients s_1 et s_2 sont des fonctions à deux déterminations.

3° Une intégrale ε est telle que $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ est une fonction algébrique à trois déterminations.

Il est facile de voir que le seul cas vraiment nouveau qui puisse se présenter est celui où le groupe Γ laisse invariables toutes les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde.

L'équation appartient donc alors à la cinquième catégorie et il sera bon, pour simplifier les calculs, de reconnaître d'abord s'il en est ainsi.

Les cas où $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ aurait plus de trois déterminations rentrent dans les cas déjà connus.

V. L'équation appartiendra à la cinquième catégorie, si l'invariant Θ est rationnel ou algébrique.

La fonction θ vérifie une équation différentielle linéaire que l'on obtiendra comme il suit. Posons

$$\theta = y^2,$$

et différentions en remplaçant lorsqu'il y a lieu y^{iv} par sa valeur déduite de l'équation (1). Les seconds membres des équations obtenues seront des fonctions linéaires à coefficients rationnels des dix quantités

$$y^{(i)} y^{(k)} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

En éliminant ces quantités entre les équations donnant $\theta, \theta', \ldots, \theta^{(10)}$, nous obtiendrons une équation différentielle linéaire du dixième ordre dont l'intégrale est la forme quadratique la plus générale aux variables y_1, y_2, y_3, y_4.

Nous rechercherons les intégrales de cette équation, dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique.

Nous devons d'abord écarter les cas où les intégrales que nous calculons ainsi sont des formes quadratiques réductibles à un, deux ou trois carrés; le groupe continu maximum Γ du groupe de rationalité laisserait alors ou un plan ou une droite ou un point invariables, et ce sont des cas que nous avons déjà examinés.

Il faut aussi écarter les cas où $\frac{\theta'}{\theta}$ est une fonction à plusieurs déterminations. S'il y en avait deux, par exemple $\frac{\theta'_1}{\theta_1}$ et $\frac{\theta'_2}{\theta_2}$, le groupe Γ laisserait invariables les deux quadriques

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0,$$

et, par suite, leur tétraèdre conjugué commun qui comprend toujours au moins un sommet et une face; ce cas nous est donc connu.

Recherchons donc les intégrales de l'équation en θ dont la dérivée logarithmique est rationnelle. S'il en existe une, nous pourrons écrire

$$(2) \qquad \frac{\theta'}{\theta} = r(x) \qquad \text{avec} \qquad \theta = y_1 y_4 - y_2 y_3.$$

Si la fonction θ définie par cette équation est algébrique, le groupe Γ est le groupe à six paramètres qui laisse θ invariable. Sinon, le groupe de rationalité est le groupe à sept paramètres qui laisse invariable l'équation $\theta = 0$.

Quel profit peut-on tirer de l'équation (2) pour simplifier l'intégration de l'équation (1)?

Par une transformation $\bar{y} = \alpha y + \beta y'$, toute semblable à celle qui a été employée pour les équations du troisième ordre, nous remplacerons l'équation (1) par une autre de même forme

$$(3) \qquad \frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} + \bar{p}_1 \frac{d^3 y}{dx^3} + \ldots = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions algébriques à deux déterminations et dont un système d'intégrales fondamentales vérifie la relation

$$\bar{y}_1 \bar{y}_4 - \bar{y}_2 \bar{y}_3 = 0.$$

M. Goursat (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XI) a obtenu le résultat suivant :

Les intégrales de l'équation (3) *sont les produits des intégrales de deux équations linéaires du second ordre dont les coefficients sont racines d'équations quadratiques à coefficients algébriques*

$$\bar{y} = \eta\zeta.$$

Nous en concluons que :

Les intégrales de l'équation (1) *s'expriment en fonction des intégrales* η *et* ζ *de ces deux équations du second ordre par des formules telles que*

$$y = a\eta\zeta + b\eta\zeta' + c\eta'\zeta + d\eta'\zeta',$$

a, b, c, d *étant des fonctions algébriques.*

VII. L'équation (1) appartient à la septième catégorie, si le sous-groupe continu maximum g de son groupe de rationalité laisse invariable la cubique

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}.$$

Une première condition nécessaire est donc que l'invariant $\Omega = \frac{\omega'}{\omega}$ soit rationnel. Supposons qu'il en soit ainsi.

Il faut ensuite que l'invariant $\Sigma = \frac{\sigma'}{\sigma}$ soit rationnel ou algébrique. Mais le cas où il est algébrique doit être rejeté, car s'il avait deux déterminations $\frac{\sigma'_1}{\sigma_1}$ et $\frac{\sigma'_2}{\sigma_2}$, le groupe g laisserait invariables les deux surfaces

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = 0,$$

et aussi les points où la cubique gauche appartenant à la surface $\sigma_1 = 0$ rencontre la surface $\sigma_2 = 0$. L'équation (1) appartiendrait donc à une autre catégorie.

Pour reconnaître si $\Sigma = \frac{\sigma'}{\sigma}$ est rationnel, nous formerons l'équation différentielle linéaire à coefficients rationnels que vérifie la fonction σ. Le procédé qui nous a déjà servi à former l'équation du dixième ordre, que vérifie la fonction θ, nous conduit alors à une équation d'ordre 35. Nous aurons à rechercher si elle admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle.

Lorsque le calcul aboutit, nous pouvons affirmer qu'il existe une forme biquadratique des intégrales $\varphi_4(y_1 y_2 y_3 y_4)$ dont la dérivée logarithmique est rationnelle.

$$\frac{\varphi'_4}{\varphi_4} = r(x).$$

Le groupe Γ laisse invariable la surface $\varphi_4 = 0$. Si l'équation ne rentre pas dans une des catégories II, III, IV ou V, cette surface $\varphi_4 = 0$ est certainement la développable formée par les tangentes à une cubique gauche, car l'énumération des groupes linéaires, que nous avons faite au n° 1, est complète.

Donc on peut écrire

$$\varphi_4 = \sigma = (y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_2^2 - y_1 y_3)(y_3^2 - y_2 y_4),$$

et l'on a

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = r(x).$$

L'équation (1) appartient à la catégorie VII, et le groupe Γ est le groupe à trois ou à quatre paramètres qui laisse invariable la cubique gauche.

M. Goursat (*Comptes rendus*, 1885) a signalé le cas où les intégrales d'une équation (1) vérifient la relation $\sigma = 0$; il a montré que ces intégrales s'expriment alors en fonction de l'intégrale λ d'une équation du second ordre par une formule telle que

$$y = a\lambda^3 + b\lambda^2\lambda',$$

sans indiquer cependant comment on peut reconnaître s'il en est ainsi et former l'équation en λ. Nous allons voir ce que deviennent ces résultats dans le cas général.

Quel profit peut-on tirer de l'équation

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = r(x), \tag{4}$$

pour faciliter l'intégration de l'équation (1)?

Avant de répondre à cette question, nous donnerons une nouvelle propriété du groupe de la cubique.

L'équation générale des surfaces du second degré qui passent par cette cubique est

$$\alpha\theta_1 + \beta\theta_2 + \gamma\theta_3 = \alpha(y_2^2 - y_1y_3) + \beta(y_3^2 - y_2y_4) + \gamma(y_1y_4 - y_2y_3) = 0.$$

Les transformations du groupe permutent entre elles les surfaces de ce faisceau et cela de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
Y_2^2 - Y_1Y_3 &= (bc-ad)^2[\;a^2(y_2^2 - y_1y_3) + ab(y_2y_3 - y_1y_4) + b^2(y_3^2 - y_2y_4)],\\
Y_2Y_3 - Y_1Y_4 &= (bc-ad)^2[2ac(y_2^2 - y_1y_3) + (ad+bc)(y_2y_3 - y_1y_4) + 2bd(y_3^2 - y_2y_4)],\\
Y_3^2 - Y_2Y_4 &= (bc-ad)^2[\;c^2(y_2^2 - y_1y_3) + cd(y_2y_3 - y_1y_4) + d^2(y_3^2 - y_2y_4)].
\end{aligned}$$

Il en résulte que la quantité $\alpha\theta_1 + \beta\theta_2 + \gamma\theta_3$ est l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire du troisième ordre à coefficients rationnels. Ce sont aussi des intégrales particulières de l'équation en θ du dixième ordre qui nous a permis de caractériser la catégorie V; cette dernière équation est donc réductible. Nous avons donc une nouvelle méthode pour reconnaître si l'équation (1) est de la septième catégorie; mais les calculs qu'il nous faudrait effectuer sont beaucoup plus longs, car nous aurions à rechercher si une équation d'ordre $C_{10}^3 = 120$ a une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle.

Cela posé, nous allons définir une transformation qui nous fera passer de l'équation (1) à une équation linéaire analogue qui admettra un système d'intégrales fondamentales $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \overline{y_4}$ entre lesquelles on aura les relations

$$(5) \qquad \frac{\overline{y_1}}{\overline{y_2}} = \frac{\overline{y_2}}{\overline{y_3}} = \frac{\overline{y_3}}{\overline{y_4}}.$$

En adoptant la représentation d'Halphen (*voir* Chap. VII, n° 2) nous pouvons dire que nous allons définir une transformation faisant passer de la courbe intégrale $C(y_1, y_2, y_3, y_4)$ de l'équation (1) à la cubique gauche (S).

Pour cela, nous ferons correspondre à un point M de la courbe C un des points où le plan osculateur à la courbe C en M rencontre la cubique; ces points sont au nombre de trois, ils seront donc déterminés par une équation du troisième ordre que nous allons calculer.

Les coordonnées d'un point du plan osculateur à la courbe C en $M(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sont de la forme

$$\overline{y_i} = \alpha y_i + \beta y'_i + \gamma y''_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Ce point sera sur la cubique gauche si

$$\frac{\alpha y_1 + \beta y'_1 + \gamma y''_1}{\alpha y_2 + \beta y'_2 + \gamma y''_2} = \frac{\alpha y_2 + \beta y'_2 + \gamma y''_2}{\alpha y_3 + \beta y'_3 + \gamma y''_3} = \frac{\alpha y_3 + \beta y'_3 + \gamma y''_3}{\alpha y_4 + \beta y'_4 + \gamma y''_4}.$$

Ces équations s'écrivent encore

$$0 = \beta^2 \theta_i(y') + \beta[\alpha \theta'_i(y) + \gamma \theta'_i(y')] + \alpha^2 \theta_i(y) + \alpha\gamma[\theta''_i(y) - 2\theta_i(y')] + \gamma^2 \theta_i(y'') \qquad (i = 1, 2, 3),$$

en désignant par $\theta_i(y')$, $\theta_i(y'')$ les fonctions θ_i définies plus haut où l'on a remplacé y par y' et y''.

En éliminant β entre ces trois équations, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \theta_1(y') & \alpha \theta_1(y) + \gamma \theta'_1(y') & \alpha^2 \theta_1(y) + \alpha\gamma[\theta''_1(y) - 2\theta_1(y')] + \gamma^2 \theta_1(y'') \\ \theta_2(y') & \alpha \theta'_2(y) + \gamma \theta'_2(y') & \alpha^2 \theta_2(y) + \alpha\gamma[\theta''_2(y) - 2\theta_2(y')] + \gamma^2 \theta_2(y'') \\ \theta_3(y') & \alpha \theta'_3(y) + \gamma \theta'_3(y') & \alpha^2 \theta_3(y) + \alpha\gamma[\theta''_3(y) - 2\theta_3(y')] + \gamma^2 \theta_3(y'') \end{vmatrix} = 0,$$

équation homogène et du troisième degré entre α et γ.

Les formules de substitution établies plus haut entre les θ montrent que cette équation n'est pas altérée lorsqu'on fait une transformation quelconque du groupe de rationalité; ses coefficients sont donc rationnels.

En différentiant un nombre convenable de fois l'équation (4) et remplaçant, lorsqu'il y a lieu, y''' par son expression déduite de (1), on arrive à un système d'équations du premier degré, qui permettent de calculer les coefficients de l'équation en α, γ.

α, β, γ *sont donc des fonctions algébriques de x à trois déterminations que nous avons appris à calculer.*

La transformation

$$\bar{y} = \alpha y + \beta y' + \gamma y''$$

change l'équation (1) en l'équation

$$\frac{d^4\bar{y}}{dx^4} + \bar{p}_1\frac{d^3\bar{y}}{dx^3} + \bar{p}_2\frac{d^2\bar{y}}{dx^2} + \bar{p}_3\frac{d\bar{y}}{dx} + \bar{p}_4\bar{y} = 0, \tag{6}$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, α, β, γ et pour laquelle il existe un système fondamental vérifiant

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3} = \frac{\bar{y}_3}{\bar{y}_4}.$$

Nous pouvons donc faire le changement de variables

$$\bar{y}_1 = \lambda_1^3, \qquad \bar{y}_2 = \lambda_1^2\lambda_2, \qquad \bar{y}_3 = \lambda_1\lambda_2^2, \qquad \bar{y}_4 = \lambda_2^3. \tag{7}$$

Les transformations des fonctions λ qui correspondent aux transformations que le groupe de rationalité effectue sur les $\bar{y}$ s'écrivent

$$\Lambda_1 = a\lambda_1 + b\lambda_2,$$
$$\Lambda_2 = c\lambda_1 + d\lambda_2.$$

Les invariants de ce groupe

$$\frac{\lambda_1\lambda_2'' - \lambda_2\lambda_1''}{\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1'} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1'\lambda_2'' - \lambda_2'\lambda_1''}{\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1'}$$

sont donc des fonctions invariables par les substitutions du groupe de rationalité; elles s'expriment donc rationnellement en fonction de x, α, β, γ. Les fonctions λ_1 et λ_2 vérifient donc l'équation du second ordre

$$\lambda'' + q_1\lambda' + q_2\lambda = 0, \tag{8}$$

et les intégrales de l'équation (6) s'expriment en fonction des intégrales de (8) par les équations (7). Nous allons former l'équation (8).

L'équation aux cubes des intégrales de (8) est

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 6q_1\frac{d^3 z}{dx^3} + (4q_1' + 11q_1^2 + 10q_2)\frac{d^2 z}{dx^2} + \ldots = 0.$$

Elle doit être identique à l'équation (6), ce qui donne

$$6q_1 = \overline{p_1},$$
$$10q_2 = \overline{p_2} - 4q_1' - 11q_1^2.$$

L'intégrale générale de l'équation (6) *s'exprime par une forme cubique des intégrales* λ_1 *et* λ_2 *de l'équation* (8).

Il est facile d'exprimer en fonction de l'intégrale λ les intégrales de l'équation (1). En effet, y s'exprime en fonction de $\overline{y}$ par une formule de la forme

$$y = A\overline{y} + B\overline{y'} + C\overline{y''} + D\overline{y'''}.$$

En remplaçant y par sa valeur λ^3 et tenant compte de (8), on trouve que

L'intégrale d'une équation (1) *appartenant à la septième catégorie s'exprime en fonction de l'intégrale d'une équation du second ordre* (8) *par une équation de la forme*

$$y = A_1\lambda^3 + B_1\lambda^2\lambda' + C\lambda\lambda'^2 + D\lambda'^3,$$

A, B, C, D *étant des fonctions algébriques à trois déterminations.*

Réciproquement, l'expression y, *où* λ *désigne l'intégrale d'une équation du second ordre, est l'intégrale d'une équation du quatrième ordre appartenant à la septième catégorie.*

Nous résumerons, dans l'énoncé suivant, quelques-uns des résultats contenus dans ce paragraphe :

Théorème. — *Les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels du quatrième ordre se partagent en sept catégories qui comprennent respectivement :*

I. *Les équations les plus générales et celles pour lesquelles* Δ *est une fonction algébrique;*

II, III, IV. *Les équations pour lesquelles ou* y, *ou* v, *ou* w *ont des dérivées logarithmiques algébriques. Ces équations sont réductibles, et il*

existe des équations linéaires du premier, ou du deuxième, ou du troisième ordre dont toutes les intégrales vérifient l'équation primitive;

V. *Les équations pour lesquelles une forme quadratique à discriminant non nul des intégrales a sa dérivée logarithmique rationnelle. L'intégration se ramène à celle de deux équations du second ordre à coefficients algébriques;*

VI. *Les équations dont le groupe de rationalité laisse invariable un complexe linéaire général. L'intégrale se ramène à celle d'une équation non linéaire du troisième ordre;*

VII. *Les équations dont le groupe de rationalité laisse invariable une cubique gauche. L'intégration se ramène à celle d'une équation du second ordre.*

CHAPITRE IX.

DÉTERMINATION DU GROUPE DE MÉROMORPHIE.

1. *Réduction du problème à une forme canonique.* — Pour les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels du deuxième, du troisième et du quatrième ordre, le groupe de méromorphie relatif à un point singulier, ou tout au moins son sous-groupe continu maximum, appartient à l'une des catégories que nous avons définies dans les trois Chapitres précédents.

Il y a donc, suivant la nature des groupes de méromorphie :

Deux types de points singuliers pour les équations du second ordre; quatre, pour celles du troisième ordre, et sept, pour celles du quatrième ordre.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point a appartienne à une catégorie déterminée est que l'invariant caractéristique de la catégorie soit méromorphe ou algébrique dans le domaine du point a, quand on y remplace les quantités y par un système fondamental d'intégrales de l'équation donnée.

Il nous faut donc reconnaître si les équations résolvantes que nous avons formées aux Chapitres précédents ont des intégrales dont la dérivée logarithmique est méromorphe ou algébrique dans le domaine du point a. On

peut même, en considérant les équations linéaires qui admettent pour intégrales les produits d'un nombre déterminé d'intégrales de ces équations résolvantes, donner au problème qui consiste à déterminer à quelle catégorie appartient le point a, la forme canonique suivante :

Reconnaître si une équation linéaire donnée

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0, \tag{1}$$

dont les coefficients sont rationnels (ou méromorphes), admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est méromorphe dans le domaine d'un point singulier a.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons que le point singulier choisi est l'origine. Nous cherchons si l'équation (1) admet une intégrale donnée par une équation de la forme

$$\frac{y'}{y} = P'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\alpha}{x} + a + bx + \ldots, \tag{2}$$

$P'\left(\frac{1}{x}\right)$ désignant la dérivée d'un polynome en $\frac{1}{x}$, $P\left(\frac{1}{x}\right)$.

En intégrant l'équation (2), nous obtenons

$$y = e^{P\left(\frac{1}{x}\right)} x^{\alpha} (A + Bx + \ldots). \tag{3}$$

L'intégrale y est donc précisément développée sous la forme d'une *série normale* de M. Thomé, mais ici *cette série doit être convergente* et définir une *intégrale normale* de l'équation (1).

Une autre façon d'énoncer notre problème fondamental est donc :

Reconnaître si l'équation (1) *admet, autour du point a, une intégrale normale.*

2. *Essai de résolution.* — Ce problème me paraît être de ceux dont on ne peut espérer obtenir la solution générale. On peut néanmoins l'étudier par les procédés suivants :

1° *Ramener la résolution du problème proposé à celle d'autres problèmes d'un ordre égal de difficultés.*

C'est ainsi que M. Poincaré a démontré (*Acta mathematica,* t. VIII)

qu'une équation admet une intégrale normale (3) alors et seulement alors qu'une deuxième équation linéaire, qu'il apprend à former, possède une intégrale de la forme

$$(z-b)^\beta G(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière, transcendante ou non, de z.

2° *Chercher les conditions que doivent remplir les coefficients de l'équation* (1) *pour qu'elle admette une intégrale normale, et faire ensuite l'étude analytique de ces conditions en se plaçant au point de vue de la théorie des fonctions.*

M. H. von Koch a traité ce problème dans le cas particulier où l'intégrale y est régulière, c'est-à-dire

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Nous allons voir qu'il est bien facile de déduire des résultats qu'il a obtenus la solution du problème général.

3° *Trouver des cas particuliers où le problème peut être complètement résolu.*

Le cas le plus remarquable et aussi le plus simple est celui qu'a étudié M. Fuchs, où l'équation (1) admet, autour du point a, n intégrales régulières.

M. Poincaré (*American Journal of Mathematics*, t. VII, et *Acta mathematica*, t. VIII) a formé des équations linéaires possédant des intégrales normales. Comme nous le verrons, les méthodes de M. H. von Koch permettraient de former une infinité de ces cas.

Nous allons ramener le problème posé plus haut à ce problème traité par M. H. von Koch (*Acta mathematica*, t. XVIII, et *Comptes rendus*, janvier 1893) : *Recherche des intégrales régulières d'une équation linéaire.*

Nous pouvons, en effet, calculer algébriquement les coefficients du polynome $P\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction des coefficients de l'équation (1). La transformation

$$y=e^{P\left(\frac{1}{x}\right)}z$$

nous conduit à une équation à coefficients rationnels (ou méromorphes)

$$(4) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + q_n z = 0,$$

dont il faut rechercher les intégrales régulières autour de l'origine.

Les fonctions $q_1, \ldots, q_n$, méromorphes autour du point o, s'écrivent

$$q_i = \sum_{\lambda=\alpha_i}^{\infty} A_{i\lambda} x^\lambda.$$

M. H. von Koch a fait connaître les résultats suivants :

On peut former, par des opérations arithmétiques, des fonctions transcendantes entières des coefficients A *qui, égalées à zéro, expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation* (4) *ait une intégrale régulière à l'origine.*

Nous avons donc ici la réponse à la question posée plus haut (2°).

En ce qui concerne les cas où l'on pourra résoudre effectivement le problème que nous nous proposons, je ne puis que citer deux nouveaux énoncés de M. H. von Koch.

On peut trouver des relations algébriques entre les coefficients de l'équation (4) *qui, égalées à zéro, donnent des conditions suffisantes, mais non nécessaires, pour que cette équation admette des intégrales régulières à l'origine.*

On peut enfin trouver des fonctions algébriques de ces coefficients qui permettent d'affirmer qu'il n'y a pas à l'origine d'intégrales régulières, dans le cas où leur valeur est supérieure à un nombre donné ε.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DOUZIÈME.

ERRATA.

Page D.10, avant-dernière ligne de la note, *au lieu de* (*Annales de Mathematiques*, t. V), *lisez* (*Acta Mathematica*, t. V).

Page D.17, lignes 9, 10, *au lieu de* nous ne trouvons, *lisez* nous trouvons.

Page D.17, lignes 12, 13, *au lieu de* on pouvait avoir, *lisez* on ne pouvait avoir.

FIN DU TOME DOUZIÈME.

25242 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

